Fonctions usuelles, trigonométrie

Rédaction incomplète. Version alpha

Plan

Index

Cette section utilise la section Nombres complexes et en particulier la présentation axiomatique de la fonction exponentielle complexe.

I. Conséquences de la présentation axiomatique de la fonction exponentielle

1. Théorèmes d'analyse admis

Ils seront démontrés dans la section Propriétés globales des fonctions dérivables
Tableaux de variations.
Théorème de la valeur intermédiaire.
Dérivabilité et expression de la dérivée pour une bijection réciproque.
Limites de fonctions croissantes

2. Conséquences

Proposition. *La fonction exponentielle réelle est une bijection strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$.

Preuve. Par définition, le fonction exponentielle ne prend pas la valeur nulle. Deplus, pour tout t réel :

$$\exp(t) = (\exp(\frac{t}{2}))^2 > 0$$

car c'est le carré d'un nombre réel. De plus d'après la propriété P4, la fonction exponentielle réelle est dérivable et elle est égale à sa dérivée donc strictement positive. On en déduit que la fonction est strictement croisante dans $\mathbb{R}$. Montrons que sa limite en $+\infty$ est $+\infty$. Notons $e = \exp(1)$. À cause de la stricte croissance, $e > 1$ donc $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison > 1 donc divergente vers $+\infty$. On en déduit que $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis la fonction (car elle est croissante) diverge vers $+\infty$. □

Définition (Définition du logarithme)**.** La fonction logarithme notée ln est la bijection réciproque de la fonction exponentielle réelle.

Variation du cos et signe de sin dans $]0, \pi[$

Proposition. *La restriction de la fonction* cos *à l'intervalle* $[0, \pi]$ *est strictement décroissante, la fonction* sin *est strictement positive dans* $]0, \pi[$.

Preuve. On a vu dans le cours sur les complexes que

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$$

On en déduit que sin ne s'annule pas dans $]0, \pi[$. Or d'après P4, la dérivée de cos est $-\sin$. On en déduit que cos est strictement monotone dans $[0, \pi]$. Or on sait que $\cos 0 = 0$ et $\cos \pi = -1$. On en déduit que cos est strictement décroissant dans $[0, \pi]$ et que sin est strictement positif dans $]0, \pi[$. □

Proposition (Surjectivité de la fonction exponentielle)**.** *Pour tout nombre complexe non nul z, il existe des nombres complexes u tels que* $\exp(u) = z$*.*
Pour tout nombre complexe de module 1*, il existe des nombres réels y tels que* $\exp(iy) = u$*.*

Preuve. On commence par montrer que pour tout nombre complexe u de module 1, il existe un réel y tel que $u = \exp(y)$.
Comme $|u|^2 = (\operatorname{Re} u)^2 + (\operatorname{Im} u)^2 = 1$, on a $\operatorname{Re} u \in [-1, +1]$. D'après le tableau de variation de la restriction de cos à $[0, \pi]$, il existe $t \in [0, \pi]$ tel que $\cos t = \operatorname{Re} u$. Les sommes de carrés sont égales à 1 donc $\operatorname{Im} u \in \{\sin t, -\sin t\}$. Or $\cos(-t) = \cos t$ et $\sin(-t) = -\sin t$. Il existe donc $y \in \{t, -t\}$ tel que

$$u = \exp(y)$$

Passon mainetant au cas général où z est un complexe non nul. D'après les propriétés de l'exponentielle réelle, il existe un réel x tel que $\exp(x) = |z|$. D'après ce que l'on vient de montrer, il existe un réel y tel que

$$\frac{z}{|z|} = \exp(iy)$$

On en déduit

$$\exp(x + iy) = |z|\frac{z}{|z|} = z$$

□

Caractérisation des nombres complexes de module 1. Pour tout nombre complexe non nul, il existe un complexe u tel que e^u.

Quelques valeurs de la fonction exponentielle complexe.

II. Trigonométrie circulaire

1. Fonctions directes

Formulaire de trigonométrie circulaire.

2. Calculs trigonométriques

Linéarisation

3. Fonctions réciproques

Définitions, propositions $\theta = \arccos x$ ssi $\cos(/theta) = x$ et θ est dans le bon intervalle. Formulations analogues pour les autres.

Tableaux de variations et graphe avec les deux courbes.

Remarques.
1. graphe de $\arcsin \circ \sin$.
2. Si z est un nombre complexe de partie réelle strictement positive, $\arctan \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$ est un argument de z. On peut remarque que dans ce cas $w = \ln |z| + i \arctan \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$ est un antécédent de z pour la fonction exponentielle complexe. Si la partie réelle de z est strictement négative, $\pi + \arctan \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$ est un argument de z.
3. Soit z un complexe non réel fixé. Une primitive de la fonction définie dans $\mathbb{R}$ et à valeur complexe

$$t \mapsto \frac{1}{t+z}$$

est

$$t \mapsto \ln |t + z| - i \arctan \frac{t + \operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Im}(z)}$$

III. Trigonométrie hyperbolique

Justification du terme par paramétrisation d'une branche d'hyperbole.