Attention aux vendredis 1 et 5 Mai fériés.

Dénombrement

Ce chapitre est introduit essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique. Il permet de modéliser certaines situations combinatoires et offre un nouveau cadre à la représentation de certaines égalités.
Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- *parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;*
- *l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.*

a) Cardinal d'un ensemble fini

Cardinal d'un ensemble fini. Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.	Notations $\|A\|$, $\mathrm{Card}(A)$, $\#A$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis.	
Cardinal de la réunion de deux ensembles finis.	La formule du crible est hors programme.
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	

b) Listes et combinaisons

Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Probabilités

A - Probabilités sur un univers fini

Les définitions sont motivées par la notion d'expérience aléatoire. La modélisation de situations aléatoires simples fait partie des capacités attendues des étudiants.

a) Expérience aléatoire et univers

L'ensemble des issues (ou résultats possibles ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé univers.	On se limite au cas où cet univers est fini.
Événement, événement élémentaire (singleton), événement contraire, événements « A et B », évènement « A ou B », événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.	

b) Espaces probabilisés finis

Une probabilité sur un univers fini Ω est une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour toutes parties disjointes A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Détermination d'une probabilité par les images des singletons.
Probabilité uniforme.
Propriétés : probabilité de la réunion de deux événements, de l'événement contraire, croissance.

Un espace probabilisé fini est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω.

c) Probabilités conditionnelles

Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par : $P(A|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

On justifiera cette définition par une approche heuristique fréquentiste.

L'application P_B est une probabilité.

Formule des probabilités composées.
Formule des probabilités totales.
Formules de Bayes :

1. si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors
$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B)}$$
2. si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle, alors
$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j)\; P(A_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)\; P(A_i)}$$

On donnera plusieurs applications issues de la vie courante.

d) Événements indépendants

Couple d'événements indépendants.

Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A|B) = P(A)$.

Famille finie d'événements mutuellement indépendants.

L'indépendance deux à deux des événements d'une famille $(A_1, \ldots, A_n)$ n'implique pas l'indépendance mutuelle si $n \geq 3$.

Questions de cours

Preuves formalisées (classement et récurrence) des dénombrements usuels :
produit cartésien, nombre de parties d'un ensemble, nombre de fonctions, nombre de fonctions injectives, nombre de parties à p éléments : classement et triangle de Pascal.
Formule des probabilités composées.
Formule des probabilités totales.
Formules de Bayes.

Prochain programme

Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini.