Énoncé

Soit n naturel non nul et $a_1, \cdots, a_n$, $b_1, \cdots, b_n$ des réels strictement positifs. On définit m, M, a, g par

$$m = \min(\frac{a_1}{b_1}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}),\ M = \max(\frac{a_1}{b_1}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}),\ a = \frac{1}{2}(m+M),\ g = \sqrt{mM}.$$

1. Soit u et v réels strictement positifs. Montrer que $\sqrt{uv} \leq \frac{1}{2}(u+v)$.
   Que peut-on en déduire pour $\frac{a}{g}$?
2. Pour x réel, factoriser $f(x) = -x^2 + (m+M)x - mM$. En déduire
$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ f(\frac{a_k}{b_k}) \geq 0.$$
3. a. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + m\,M \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq (m+M) \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$
   b. En déduire
$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \leq \frac{a}{g} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Corrigé

1. Pour tout $(u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $0 \leq (\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 = u + v - 2\sqrt{uv}$ donc $\sqrt{uv} \leq \frac{1}{2}(u+v)$. On en déduit que $\frac{a}{g} \geq 1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -(x-m)(x-M)$. Un tableau de signe montre immédiatement que $\forall x \in [m, M],\ f(x) \geq 0$. Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $m \leq \frac{a_k}{b_k} \leq M$ donc $f\left(\frac{a_k}{b_k}\right) \geq 0$.
3. a. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. D'après la question précédente :
$$-\frac{a_k^2}{b_k^2} + (m+M)\frac{a_k}{b_k} - mM$$
   donc en multipliant par b_k^2
$$-a_k^2 + (m+M)a_k b_k - mM b_k^2 \geq 0 \qquad \text{donc } a_k^2 + mM b_k^2 \leq (m+M)a_k b_k.$$
   Le résultat s'obtient en sommant ces inégalités pour k variant de 0 à n.

   b. En divisant l'inégalité précédente par g, on obtient :
$$\frac{1}{g}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + g \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq 2\frac{a}{g} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$
   Posons alors $u = \frac{1}{g}\sum_{k=1}^{n} a_k^2$, $v = g\sum_{k=1}^{n} b_k^2$. D'après la première question :
$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} = \sqrt{uv} \leq \frac{1}{2}(u+v) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{g}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + g\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leq \frac{a}{g}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Rémy Nicolai Acsmaj