Énoncé

Soit n naturel non nul et $a_1, \cdots, a_n$, $b_1, \cdots, b_n$ des réels strictement positifs.

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
   a. Montrer que $2a_1a_2b_1b_2 \leq a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2$.
   b. En déduire par récurrence l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
   $$\left(\sum_{j=1}^{n} a_jb_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right).$$
   c. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à des familles bien choisies, montrer
   $$\forall x \geq 0, \; \left(\sum_{j=1}^{n} a_jb_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1+x}b_j^{1-x}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1-x}b_j^{1+x}\right).$$
2. Dans cette question, on démontre une généralisation qui fournit une preuve nouvelle et indépendante de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   On considère la fonction
   $$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1+x}b_j^{1-x}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1-x}b_j^{1+x}\right) \end{cases}$$
   a. Soit λ réel non nul. Former le tableau de variations de la fonction $x \to \operatorname{ch}(\lambda x)$ définie dans $\mathbb{R}$.
   b. En développant $f(x)$, montrer que c'est la somme d'un nombre réel et d'une combinaison d'expressions contenant des cosinus hyperboliques.
   c. Montrer que f est croissante dans $\mathbb{R}^+$. En déduire une nouvelle preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   Par rapport à 1.b., quelles nouvelles inégalités a-t-on obtenu ?
   d. En utilisant le développement de 2.b. prouver le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Corrigé

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
   a. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $2xy \leq x^2 + y^2$. L'inégalité demandée s'obtient en posant $x = a_1b_2$ et $y = a_2b_1$.
   b. Le résultat étant évident pour $n = 1$, initialisons la récurrence au rang $n = 2$ en utilisant le résultat de a.. Pour $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$,
   $$\begin{aligned}(a_1b_1 + a_2b_2)^2 &= a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 \\ &\leq a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_1^2b_2^2a_2^2b_1^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).\end{aligned}$$
   La croissance de la fonction racine carrée et la positivité des a_i, b_i entraine
   $$a_1b_1 + a_2b_2 \leq (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}(b_1^2 + b_2^2)^{1/2}.$$
   Supposons l'inégalité au rang n. Soient $a_1, ..., a_{n+1}, b_1, ..., b_{n+1} > 0$.
   $$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n+1} a_jb_j\right)^2 &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_jb_j + a_{n+1}b_{n+1}\right)^2 \\ &\leq \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2} + a_{n+1}b_{n+1}\right)^2 \text{ par hyp. de récurrence} \\ &\leq \left(\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}\right)^2 + a_{n+1}^2\right)\left(\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2}\right)^2 + b_{n+1}^2\right) \text{ d'après le cas } n = 2 \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n+1} b_j^2\right)\end{aligned}$$
   L'inégalité de Cauchy-Schwarz est démontrée.
   c. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, posons :
   $$\alpha_j = a_j^{1/2-x/2}b_j^{1/2+x/2} \qquad \beta_j = a_j^{1/2+x/2}b_j^{1/2-x/2}.$$

Rémy Nicolai Acsmon

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2\right)$$
$$\leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1-x} b_j^{1+x}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1+x} b_j^{1-x}\right)$$

2. Une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   a. L'application $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{ch}(\lambda x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \lambda \operatorname{sh}(\lambda x)$. Comme la fonction sh est impaire, $\lambda \operatorname{sh}(\lambda x)$ est du signe de x. Donc la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle atteint un minimum en 0 et $g(0) = 1$.
   b. Soit $x \geq 0$. Développons le produit :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j^{1+x} b_j^{1-x} a_k^{1-x} b_k^{1+x}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_j^2 b_j^2 + \sum_{1\leq j<k\leq n} a_j a_k b_j b_k \left[\left(\frac{a_j b_k}{a_k b_j}\right)^x + \left(\frac{a_j b_k}{a_k b_j}\right)^{-x}\right]$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_j^2 b_j^2 + 2\sum_{1\leq j<k\leq n} \operatorname{ch}\left(x \ln\left(\frac{a_j b_k}{a_k b_j}\right)\right)$$

   c. D'après les questions 2.a et 2.b, la fonction f est une somme de fonction croissantes sur $\mathbb{R}_+$ donc c'est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, $f(0) \leq f(1)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'en déduit puisque :

$$f(0) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \quad \text{et} \quad f(1) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right).$$

   Plus généralement, la croissance de f montre que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ tels que $x \leq y$:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1+x} b_j^{1-x}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1+x} b_j^{1-x}\right) \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1+y} b_j^{1-y}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1-y} b_j^{1+y}\right).$$

   d. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si $f(0) = f(1)$, si et seulement si pour tout $(j, k) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $j < k$, la fonction :

$$x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \operatorname{ch}\left(\ln\left(\frac{a_j b_k}{a_k b_j}\right) x\right)$$

   est constante, ie $a_j b_k = a_k b_j$. Ainsi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si :
$$\forall (j, k) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_j b_k = a_k b_j.$$

Rémy Nicolai Acsmon