Énoncé

L'objet de ce problème est de former une bijection entre $\mathbb{N}$ et l'ensemble des rationnels strictement positifs[1].

On utilise les notations $\lfloor x \rfloor$ et $\{x\}$ pour désigner la partie entière et la partie fractionnaire d'un nombre réel x. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; x = \lfloor x \rfloor + \{x\} \text{ avec } \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \text{ et } 0 \leq \{x\} < 1$$

On définit diverses fonctions f, g, r, ρ, l, λ :

$$f : \begin{cases} [0, +\infty[\to]0, +\infty[\\ x \to \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor + 1 - \{x\}} \end{cases} \qquad g : \begin{cases}]0, +\infty[\to [0, +\infty[\\ x \to \begin{cases} \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1 - \{\frac{1}{x}\} \text{ si } \frac{1}{x} \notin \mathbb{N}^* \\ \frac{1}{x} - 1 \text{ si } \frac{1}{x} \in \mathbb{N}^* \end{cases} \end{cases}$$

$$r : \begin{cases} [0, +\infty[\to [0, 1[\\ x \to \dfrac{x}{1+x} \end{cases} \qquad \rho : \begin{cases} [0, 1[\to [0, +\infty[\\ x \to \dfrac{x}{1-x} \end{cases}$$

$$l : \begin{cases} [0, +\infty[\to [1, +\infty[\\ x \to x + 1 \end{cases} \qquad \lambda : \begin{cases} [1, +\infty[\to [0, +\infty[\\ x \to x - 1 \end{cases}$$

On définit le *poids* noté $\pi(x)$ d'un rationnel x par $\pi(x) = p + q$ lorsque $x = \frac{p}{q}$ (avec p et q entiers) est une écriture irréductible de x.
Pour tout nombre naturel n supérieur ou égal à 2, on désigne par C_n l'ensemble des rationnels strictement positifs de poids égal à n et par W_n l'ensemble des rationnels strictement positifs de poids inférieur ou égal à n. On convient que la représentaion irréductible d'un entier n est $\frac{n}{1}$, son poids est donc $n + 1$.
On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$$

1. a. Préciser C_2, C_3, C_4.
   b. Préciser les u_i, pour i entre 1 et 7.
   c. Pour x réel, préciser $\lfloor x + 1 \rfloor$ et $\{x + 1\}$.
2. a. Montrer que les fonctions f et g sont des bijections réciproques l'une de l'autre.
   b. Montrer que les fonctions r et ρ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.
   c. Montrer que les fonctions l et λ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.
3. a. Montrer que $f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour tout $x \in [0, 1[$.
   b. Montrer que $f \circ r = l$.
   c. Montrer que $r \circ f = f \circ l$.
   d. Montrer que $l \circ f = f \circ f \circ l$.
4. a. Montrer que $u_n \neq 1$ pour tout entier naturel n non nul.
   b. Pour tous naturels p et q, montrer que $p < q$ entraine $u_p \neq u_q$.
5. a. Soit $x = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel strictement positif avec p et q naturels. Montrer que $\pi(x) \leq p + q$.
   b. Montrer que $\pi(\lambda(x)) < \pi(x)$ lorsque x est un nombre rationnel strictement plus grand que 1.
   c. Montrer que $\pi(\rho(x)) < \pi(x)$ lorsque x est un nombre rationnel dans $]0, 1[$.
6. Montrer que pour tout nombre rationnel x strictement positif, il existe un unique entier naturel n tel que $u_n = x$.

[1] suite de Calkin-Wilf-Newman d'après *Proofs from The Book* Springer

Rémy Nicolai Acwn

Corrigé

1. a. Selon les définitions de l'énoncé :

$$C_2 = \{1\}\,,\; C_3 = \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}\,,\; C_4 = \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$$

b. Avec la définition de f, on trouve

$$u_0 = 1,\; u_1 = \frac{1}{2},\; u_2 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,\; u_3 = \frac{1}{3},\; u_4 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2},$$
$$u_5 = \frac{1}{1+1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3},\; u_6 = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3,\; u_7 = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$$

On remarque en particulier que

$$C_2 = \{u_0\}\,,\; C_3 = \{u_1, u_2\}\,,\; C_4 = \{u_3, u_6\}$$

Cette remarque servira à initialiser une récurrence dans la dernière question.

c. Avec les définitions des parties entières et fractionnaires, il est immédiat que

$$\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1, \qquad \{x+1\} = \{x\}$$

2. a. On doit vérifier que $f \circ g(x) = x$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ et que $g \circ f(x) = x$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

– Calcul de $f \circ g(x) = x$ pour $x > 0$.
Si $\frac{1}{x} \in \mathbb{N}$

$$g(x) = \frac{1}{x} - 1 \in \mathbb{N}, \lfloor g(x) \rfloor = \frac{1}{x} - 1, \{g(x)\} = 0 \Rightarrow f(g(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x} - 1 + 1} = x$$

Si $\frac{1}{x} \notin \mathbb{N}$.

$$g(x) = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + \underbrace{1 - \{\frac{1}{x}\}}_{\in]0,1[} \Rightarrow \lfloor g(x) \rfloor = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor, \{g(x)\} = 1 - \{\frac{1}{x}\}$$
$$\Rightarrow f(g(x)) = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1 - (1 - \{\frac{1}{x}\})} = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor + \{\frac{1}{x}\}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

– Calcul de $g \circ f(x) = x$ pour $x \geq 0$.
Traitons à part $x = 0$. On a $g \circ f(0) = g(1) = 1 - 1 = 0$.
Pour $x > 0$, commençons par caractériser $\frac{1}{g(x)} \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{g(x)} \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor + 1 - \{x\} \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{N}^*$$

On traite alors deux cas.
Si $x \in \mathbb{N}^*$.

$$g \circ f(x) = \frac{1}{f(x)} - 1 = \lfloor x \rfloor + 1 - 1 = \lfloor x \rfloor = x$$

Si $x \notin \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{f(x)} = \lfloor x \rfloor + \underbrace{1 - \{x\}}_{\in]0,1[} \Rightarrow \begin{cases} \lfloor \frac{1}{f(x)} \rfloor = \lfloor x \rfloor \\ \{\frac{1}{f(x)}\} = 1 - \{x\} \end{cases}$$
$$\Rightarrow g(f(x)) = \lfloor x \rfloor + 1 - (1 - \{x\}) = \lfloor x \rfloor + \{x\} = x$$

b. Comme $r(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$, il est bien clair que r est une application continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ vers $[0, 1[$. Elle est donc bijective. Pour prouver que ρ est sa bijection réciproque, il suffit donc de montrer que $\rho \circ r(x) = x$.

$$\forall x \in [0, +\infty[:\; \rho \circ r(x) = \frac{r(x)}{1 - r(x)} = \frac{\frac{x}{1+x}}{1 - \frac{x}{1+x}} = \frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{1}{1+x}} = x$$

c. Il est totalement évident que l et λ sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Ce sont de simples translations.

3. a. Pour tout $x \in [0, 1[$, $\lfloor x \rfloor = 0$ et $\{x\} = x$. On en déduit que $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

b. Calcul de $f \circ r(x)$ pour $x \geq 0$.
Si $x = 0$ alors $r(0) = 0$ donc $f \circ r(0) = f(0) = 1 = l(0)$.
Si $x > 0$ alors $r(x) \in]0, 1[$ donc :

$$f(r(x)) = \frac{1}{1 - r(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x}{1+x}} = x + 1 = l(x)$$

c. Calcul de $r \circ f(x)$ pour $x \geq 0$.
Si $x = 0$, $f(0) = 1$, $r \circ f(0) = r(1) = \frac{1}{2}$.D'autre part $l(0) = 1$, $f \circ l(0) = f(1) =$

$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. On a donc bien $r \circ f(0) = f \circ l(0)$.
Si $x > 0$, en utilisant 1.c.

$$r \circ f(x) = \frac{f(x)}{1+f(x)} = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}+1} = \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1 - \{x\} + 1}$$
$$= \frac{1}{\lfloor x+1 \rfloor + 1 - \{x+1\}} = f \circ l(x)$$

d. On peut combiner les questions précédentes et utiliser l'associativité de la composition des applications.

$$l \circ f = (f \circ r) \circ f = f \circ (r \circ f) = f \circ (f \circ l) = (f \circ f) \circ l$$

4. a. On a montré que f était une bijection de $[0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ avec $f(0) = 1$. Cela entraine que tous les u_n sont non nuls. Si $u_n = 1$ avec $n \geq 1$, comme $u_n = f(u_{n-1})$, on a $f(u_{n-1}) = 1$ donc $u_{n-1} = 0$ ce qui est impossible.

b. Supposons $p < q$ et $u_p = u_q$. Cela peut s'écrire avec des compositions de f

$$u_p = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}(1) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{q \text{ fois}}(1) = u_q$$

On peut alors composer p fois à gauche par la bijection réciproque g ce qui donne

$$1 = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{q-p \text{ fois}}(1) = u_{q-p}$$

Ceci est en contradiction avec la question a. et montre que l'application $n \to u_n$ est injective.

5. a. Si l'écriture $x = \frac{p}{q}$ n'est pas irréductible, il en existe une autre de la forme $x = \frac{p_1}{q_1}$ qui est irréductible avec un entier naturel k tel que $p = kp_1$ et $q = kq_1$. On a alors $\pi(x) = p_1 + q_1 \leq p + q$.

b. Soit x un nombre rationnel strictement plus grand que 1 et $\frac{p}{q}$ une écriture irréductible de ce nombre. Alors :

$$\pi(\lambda(x)) = \pi(\frac{p}{q} - 1) = \pi(\frac{p-q}{q}) \leq p - q + q = p < \pi(x) = p + q$$

c. Soit x un nombre rationnel dans $]0, 1[$ et $\frac{p}{q}$ une écriture irréductible de ce nombre. Alors :

$$\pi(\rho(x)) = \pi(\frac{\frac{p}{q}}{1 - \frac{p}{q}}) = \pi(\frac{p}{q-p}) \leq p + q - p = q < \pi(x) = p + q$$

6. On va démontrer par récurrence la propriété suivante.

$$(\mathcal{R}_m) \qquad \forall x \in W_m, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x = u_n$$

La question 1.a. montre que les propriétés $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$, $\mathcal{R}_4$ sont vraies. Montrons maintenant que $\mathcal{W}_m$ entraine $\mathcal{W}_{m+1}$.
Il s'agit de montrer que tout rationnel x (autre que $1 = u_0$) de poids $m+1$ est un u_k pour un certain entier k.
Si $x > 1$, considérons $\lambda(x)$. Comme $\pi(\lambda(x)) < \pi(x)$ on a $\lambda(x) \in W_m$ et d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un entier n tel que

$$\lambda(x) = u_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(1)$$

On peut écrire alors $x = l(\lambda(x))$ et utiliser les propriétés de la question 3.

$$x = l \circ \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(1) = f \circ f \circ l \circ \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-1 \text{ fois}}(1)$$
$$= \cdots = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{2n \text{ fois}} \circ l(1) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{2n \text{ fois}}(2) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{2n+2 \text{ fois}}(1) = u_{2n+2}$$

car $2 = u_2 = f \circ f(1)$.

Si $0 < x < 1$. On considère $\rho(x)$ dont le poids est strictement plus petit que celui de x. Il existe donc un n tel que $\rho(x) = u_n$. On utilise alors r :

$$x = r \circ \rho(x) = r \circ \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(1) = f \circ l \circ \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-1 \text{ fois}}(1)$$
$$= \cdots = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{2n-1 \text{ fois}} \circ l(1) = u_{2n+1}$$

Ceci montre bien la surjectivité de l'application $n \to u_n$ de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des rationnels strictement positifs.