Énoncé

Soit $k \in]0,1[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2(t)}}$.

1. Montrer que la fonction F est bien définie, impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée.
2. Posons $K = F(\pi/2)$ et $T = F(\pi)$. Montrer que $T = 2K$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x+\pi) = F(x) + T$.
4. Montrer que $F(x) \geq x$ pour tout $x \geq 0$. En déduire que F réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
   Notons $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la bijection réciproque de F. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on notera également :
   $$\operatorname{sn}(x) = \sin(A(x)), \qquad \operatorname{cn}(x) = \cos(A(x)), \qquad \operatorname{dn}(x) = \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}(x)^2}.$$
5. Montrer que la fonction sn est $2T$-périodique.
6. Montrer que les fonctions sn et cn sont dérivables et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\operatorname{sn}'(x) = \operatorname{cn}(x)\operatorname{dn}(x) \quad \text{et} \quad \operatorname{cn}'(x) = -\operatorname{sn}(x)\operatorname{dn}(x)$$
7. Soient $\omega \in \mathbb{R}_+$ et $\theta_0 \in]0,\pi/2[$. Posons $k = \sin(\theta_0/2)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\theta(x) = 2\arcsin(k\operatorname{sn}(\omega x + K)).$$
   a. Montrer que θ vérifie :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \theta''(x) + \omega^2\sin(\theta(x)) = 0,\ \theta(0) = \theta_0,\ \theta'(0) = 0.$$
   b. Montrer que θ est périodique et déterminer une période.

Corrigé

1. Comme $0 < k < 1$, la fonction $t \mapsto \sqrt{1-k^2\sin^2(t)}$ ne s'annule pas. Son inverse est continue et admet des primitives. La fonction F est une de ces primitives, celle qui prend la valeur 0 en 0.
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2(t)}}.$$
   On montre que la fonction est impaire en utilisant le changement de variable $\theta = -t$ dans $F(-x)$.
2. Dans l'intégrale K, effectuons le changement de variable $\theta = \pi - t$.
   $$K = \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} \frac{-d\theta}{\sqrt{1-(-\sin\theta)^2}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{dt}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}$$
   En décomposant l'intégrale F en $\frac{\pi}{2}$ par la relation de Chasles, on obtient $F = 2K$.
3. Par la relation de Chasles, pour tout réel x,
   $$F(x+\pi) = \underbrace{\int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}}_{=T} + \int_\pi^{x+\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} = T + F(x)$$
   en utilisant le changement de variable $\theta = t - \pi$ dans l'intégrale entre π et $\pi + x$.
4. Pour tout $x > 0$, $F(x) \geq x$. En effet
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ 0 < \sqrt{1-k^2\sin^2(t)} < 1 \Rightarrow F'(x) \geq x.$$
   On conclut avec un tableau de variation ou la conservation des inégalité par intégration. On en déduit que la fonction tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Par imparité, elle est dérivable strictement croissante dans $\mathbb{R}$ avec les limites $-\infty$ et $+\infty$. C'est donc une bijection.
5. D'après la question 3, pour tout y réel,
   $$A(F(y)+T) = y + \pi \Rightarrow \sin(A(F(y)+T)) = -\sin y$$
   Pour un réel x quelconque, considérons $y = A(x)$. On a alors
   $$x = F(y) \Rightarrow \sin(A(x+T)) = -\sin(A(x)) \Rightarrow \operatorname{sn}(x+T) = -\operatorname{sn}(x).$$
   On en déduit que la fonction sn est $2T$-périodique.

6. D'après les formules pour la dérivée d'une fonction composée et d'une bijection réciproque
$$\operatorname{sn}'(x) = A'(x)\operatorname{cn}(x) = \frac{1}{F'(A(x))}\operatorname{cn}(x) = \sqrt{1-k^2\sin^2(A(x))}\operatorname{cn}(x) = \operatorname{dn}(x)\operatorname{cn}(x).$$
La démonstration pour cn' est analogue en tenant compte de $\cos' = -\sin$
$$\operatorname{cn}'(x) = -\operatorname{dn}(x)\operatorname{sn}(x)$$

7. Soient $\omega \in \mathbb{R}_+$ et $\theta_0 \in]0, \pi/2[$. L'énoncé définit $k = \sin(\theta_0/2)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\theta(x) = 2\arcsin(k\operatorname{sn}(\omega x + K)).$$
   a. Calcul de $\theta'(x)$ et $\theta''(x)$.
$$\begin{aligned}\theta'(x) = 2k\omega\frac{\operatorname{sn}'(\omega x+K)}{\sqrt{1-(k\operatorname{sn}(\omega x+k))^2}} = 2k\omega\frac{\operatorname{dn}(\omega x+K)\operatorname{cn}(\omega x+K)}{\operatorname{dn}(\omega x+K)}\\ = 2k\omega\operatorname{cn}(\omega x+K)\end{aligned}$$
$$\theta''(x) = -2k\omega^2\operatorname{dn}(\omega x+K)\operatorname{sn}(\omega x+K).$$
   D'autre part,
$$\begin{aligned}\sin(\theta(x)) &= 2\sin(\arcsin(k\operatorname{sn}(\omega x+K)))\cos(\arcsin(k\operatorname{sn}(\omega x+K)))\\ &= 2k\operatorname{sn}(\omega x+K)\sqrt{1-k\operatorname{sn}^2(\omega x+K)} = 2k\operatorname{sn}(\omega x+K)\operatorname{dn}(\omega x+K).\end{aligned}$$
   En combinant, on déduit
$$\theta''(x) + \omega\sin(\theta(x)) = 0.$$
   Comme $K = F(\frac{\pi}{2})$, $A(K) = \frac{\pi}{2}$ donc $\operatorname{sn}(K) = \sin(A(K)) = 1$ et
$$\theta(0) = \arcsin(k\operatorname{sn}(K)) = \arcsin(k) = \arcsin(\sin\theta_0) = \theta_0.$$
   De même $\operatorname{cn}(K) = \cos(A(K)) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ donc
$$\theta'(0) = 2k\omega\operatorname{cn}(K) = 0.$$
   b. Comme sn est $2T$-périodique, θ est $\frac{2T}{\omega}$-périodique.