Énoncé

Ce texte fait intervenir des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, périodiques de période 2π et à valeurs dans $\mathbb{C}$. De telles fonctions sont appelées des *lacets*. Un lacet γ peut être vu comme un mouvement. Pour $t \in \mathbb{R}$, le complexe $\gamma(t)$ représente la position dans le plan d'un point mobile. La trajectoire (notée Γ) est l'ensemble des points par où est passé le mobile. À cause de la périodicité,

$$\Gamma = \{\gamma(t),\ t \in \mathbb{R}\} = \{\gamma(t),\ t \in [0, 2\pi]\}\,.$$

Les figures **??** et **??** présentent les trajectoires Γ pour deux lacets.

(a) $\gamma(t) = e^{it}$. (b) $\gamma(t) = e^{2it} - e^{it} - 1$.

FIG. 1: Exemples de trajectoires.

Pour un lacet γ et un complexe $z \notin \Gamma$, *l'indice* de z par rapport à γ est

$$I_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,dt.$$

Il s'agit de l'intégrale d'une fonction d'une variable réelle $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs complexes où $\gamma'(t)$ est la notation habituelle pour la dérivée de γ. Pour un nombre complexe z tel que $|z| \neq 1$, on note $I_0(z)$ son indice par rapport au mouvement circulaire.

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} - z}\,dt \qquad \text{avec } \gamma(t) = e^{it}.$$

Partie préliminaire.

1. Soit f continue dans $\mathbb{R}$, périodique de période $T > 0$ et à valeurs complexes. Montrer que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)\,dt$ est constante.
2. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$
3. Pour θ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, exprimer $\cos\theta$ en fonction de $\tan\frac{\theta}{2}$.

Partie I. Calcul direct de $I_0(z)$.

Dans cette partie, $z \in \mathbb{C}$, $|z| \neq 1$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ est un argument de z. On note

$$A(z) = \operatorname{Re}(I_0(z)), \qquad B(z) = \operatorname{Im}(I_0(z)).$$

1. Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$. En effectuant le changement de variable $t = \tan\frac{\theta}{2}$, montrer
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta} = \frac{2}{1 - r^2}\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\right).$$
2. a. Montrer que
$$A(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|\cos(t - \varphi)}{1 + |z|^2 - 2|z|\cos(t - \varphi)}\,dt, \qquad B(z) = 0.$$
   b. Montrer que
$$I_0(z) = \frac{1}{2} + \frac{1 - |z|^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + |z|^2 - 2|z|\cos(t - \varphi)}.$$
3. Montrer que
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + |z|^2 - 2|z|\cos(t - \varphi)} = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + |z|^2 - 2|z|\cos\theta} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + |z|^2 + 2|z|\cos\theta}\right).$$
   En déduire $I_0(z) = \begin{cases} 1 \text{ si } |z| < 1 \\ 0 \text{ si } |z| > 1 \end{cases}.$

Rémy Nicolai Aindice

Partie II. L'indice est un entier.

On revient au cas général : γ est un lacet et $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ n'est pas sur la trajectoire. On considère l'équation différentielle

$$(\gamma - z)y' - \gamma' y = 0$$

où la fonction inconnue y est à valeurs complexes.

1. Déterminer la solution évidente qui prend en $t = 0$ la valeur $\gamma(0) - z$.
2. En utilisant un résultat de cours cité précisément, exprimer cette solution avec la fonction exponentielle complexe et une intégrale.
3. Montrer que $I_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

Corrigé

Partie préliminaire.

1. Notons φ la fonction dont on veut montrer qu'elle est constante et F la primitive de f nulle en 0. Pour tout x réel,

$$\varphi(x) = F(x+T) - F(x) \Rightarrow \varphi'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$$

car la fonction f est T-périodique. Comme φ est à dérivée nulle sur un intervalle, elle est constante.

2. Notons $\varphi(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. La fonction φ est dérivable dans $\mathbb{R}^*$ avec

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

La fonction φ est donc constante dans chacun des intervalles formant son domaine.

$$x > 0 \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $x < 0$, $\varphi(x) = -\frac{\pi}{2}$ car la fonction est impaire.

3.
$$\cos\theta = \cos(2\,\frac{\theta}{2}) = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2}\left(1 - \tan^2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}.$$

Partie I. Calcul direct de $I_0(z)$.

1. On effectue le changement de variable $t = \tan\frac{\theta}{2}$ puis on intègre avec un arctan.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+r^2-2r\cos\theta} &= \int_0^1 \frac{1+t^2}{(1+r^2)(1+t^2)-2r(1-t^2)}\,\frac{2\,dt}{1+t^2} \\
&= 2\int_0^1 \frac{dt}{(1-r)^2+(1+r)^2t^2} = \frac{2}{(1-r)^2}\int_0^1 \frac{dt}{1+\left(\frac{1+r}{1-r}\,t\right)^2} \\
&= \frac{2}{(1-r)^2}\left[\frac{1-r}{1+r}\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\,t\right)\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{1-r^2}\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\right).
\end{aligned}$$

2. a. Avec $z = |z|e^{i\varphi}$, considérons

$$\frac{e^{it}}{e^{it}-z} = \frac{e^{it}(e^{-it}-\overline{z})}{|e^{it}-z|^2} = \frac{1-|z|e^{i(t-\varphi)}}{1+|z|^2-2|z|\cos(t-\varphi)}.$$

La partie réelle de l'intégrale est l'intégrale de la partie réelle.

$$A(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}}{e^{it}-z}\right) dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|\cos(t-\varphi)}{1+|z|^2-2|z|\cos(t-\varphi)}\, dt.$$

On peut calculer facilement la partie imaginaire avec une primitive.

$$\begin{aligned} B(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{it}}{e^{it}-z}\right) dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{-|z|\sin(t-\varphi)}{1+|z|^2-2|z|\cos(t-\varphi)}\, dt \\ &= -\frac{1}{4\pi}\left[\ln\left(1+|z|^2-2|z|\cos(t-\varphi)\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0 \end{aligned}$$

à cause de la 2π-périodicité.

b. En écrivant

$$\begin{aligned} 1-|z|\cos(t-\varphi) &= \frac{1}{2}\left(1+|z|^2-2|z|\cos(t-\varphi)\right) - \frac{1}{2}\left(1+|z|^2\right) + 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(1+|z|^2-2|z|\cos(t-\varphi)\right) + \frac{1}{2}\left(1-|z|^2\right) \end{aligned}$$

et avec la partie imaginaire nulle, on obtient

$$I_0(z) = A(z) = \frac{1}{2} + \frac{1-|z|^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+|z|^2-2|z|\cos(t-\varphi)}.$$

3. Transformons l'intégrale à exprimer :

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+|z|^2-2|z|\cos(t-\varphi)} \\ &= \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \frac{d\theta}{1+|z|^2-2|z|\cos\theta} \quad \text{(chgt. de v. } \theta = t-\varphi\text{)} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+|z|^2-2|z|\cos\theta} \quad \text{(question 1 Partie Préliminaire)} \\ &= 2\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+|z|^2-2|z|\cos\theta} \quad \text{(parité)} \\ &= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+|z|^2-2|z|\cos\theta} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\theta}{1+|z|^2-2|z|\cos\theta}\right) \quad \text{(Chasles)} \\ &= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+|z|^2-2|z|\cos\theta} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1+|z|^2+2|z|\cos\varphi}\right) \\ &\qquad (\varphi = \pi-\theta \text{ dans int. } 2). \end{aligned}$$

Utilisons la question 1 avec $r = \pm|z|$, il vient

$$\begin{aligned} I_0(z) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{1+|z|}{1-|z|} + \arctan\frac{1-|z|}{1+|z|}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 \text{ si } \frac{1+|z|}{1-|z|} > 0 \Leftrightarrow |z| < 1 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0 \text{ si } \frac{1+|z|}{1-|z|} < 0 \Leftrightarrow |z| > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

avec la question 2 de la partie préliminaire.

Partie III. Propriétés de l'indice.

1. La solution évidente est $t \mapsto \gamma(t) - z$.
2. D'après le cours sur les équations différentielles linéaires du premier ordre, les solutions sont les fonctions λe^F où $\lambda \in \mathbb{C}$ et F est une primitive de $t \mapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$. On peut exprimer F avec une intégrale, par exemple

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-z}\, du.$$

Le coefficient λ fait coïncider la condition initiale en $t = 0$, on en déduit

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \gamma(t) - z = (\gamma(0) - z)e^{\int_0^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-z}\,du}.$$

3. La fonction $\gamma - z$ est 2π-périodique, l'expression précédente en $t = 2\pi$ montre

$$e^{\int_0^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-z}\,du} = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-z}\,du \in 2i\pi\mathbb{Z} \Rightarrow I_\gamma(z) \in \mathbb{Z}.$$