Énoncé

L'objectif de cette partie est de montrer l'irrationalité de e^r pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}.$$

Par définition de la fonction exponentielle, le nombre e est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
On définit aussi, pour tout$n \in \mathbb{N}^*$, des fonctions polynomiales U_n et L_n et T_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ U_n(x) = \frac{1}{n!}\, x^n(1-x)^n,\ L_n = U_n^{(n)}.$$

On définit enfin la fonction T_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T_n(x) = \int_0^1 L_n(t)\, e^{xt}\, dt.$$

Partie I. Résultats préliminaires.

1. a. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente de limite nulle. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.
   b. Soit λ réel non nul. Montrer que $\left(\frac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.
2. Valeurs prises par les dérivées successives d'une fonction polynomiale.
   a. Montrer que
   $$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ U_n^{(k)}(0) = U_n^{(k)}(1) = 0.$$
   b. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, exprimer $U_n^{(n+k)}(0)$ et $U_n^{(n+k)}(1)$ en fonction de n et k. Vérifier que ces nombres sont des entiers.
   On pourra utiliser la formule de Leibniz et préciser les termes contribuant réellement aux sommes obtenues.
3. Formule d'intégration par parties itérée.
   Soit a et b réels tels que $a < b$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer
   $$\int_a^b f^{(p)}(t)g(t)\,dt = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\left[f^{(p-k)}g^{(k-1)}\right]_a^b + (-1)^p\int_a^b f(t)g^{(p)}(t)\,dt.$$
4. Un critère d'irrationalité.
   Soit $\omega > 0$. On pose
   $$\mathbb{Z}\omega = \{k\omega, k \in \mathbb{Z}\},\ \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega = \left\{k + k'\omega, (k, k') \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$
   a. On suppose qu'il existe $a > 0$ réel tel que $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega = \mathbb{Z}a$. Montrer que $\omega \in \mathbb{Q}$ (ω est rationnel).
   b. On suppose $\omega \in \mathbb{Q}$ avec p et q naturels non nuls, premiers entre eux tels que $\omega = \frac{p}{q}$. On pose enfin $a = \frac{1}{q}$.
      i. Montrer que $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega \subset \mathbb{Z}a$.
      ii. Montrer que $\mathbb{Z}a \ \subset Z + \mathbb{Z}\omega$. On admettra l'existence de deux entiers u et v tels que $up + vq = 1$.
5. Une condition suffisante d'irrationalité.
   a. Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de nombres entiers dont la limite est nulle. Montrer
   $$\exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \geq N,\ k_n = 0.$$
   b. Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres entiers tels que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_n\omega - p_n \neq 0.$$
   Montrer que si la suite $(q_n\omega - p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle, alors le nombre ω est irrationnel.

Partie II. Irrationalités

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Justifier que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < e < v_n.$$
2. Vérifier que $(n!\,u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de nombres entiers puis montrer que e est irrationnel.
3. Préciser les degrés des fonctions polynomiales U_n et L_n.
4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$.
   a. Montrer que
   $$T_n(x) = (-x)^n\int_0^1 U_n(t)\, e^{xt}\,dt \qquad \text{et} \qquad T_n(x) \neq 0.$$

b. En majorant $t(1-t)$ pour $t \in [0,1]$, montrer que

$$|x^n\, T_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{4^n\, n!}\, \max(1, e^x).$$

c. Montrer que la suite $(x^n T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

5. Pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$, on pose $\psi_x(t) = e^{xt}$.

a. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\; x^{n+1}\, T_n(x) = (-1)^n \int_0^1 \psi_x^{(2n+1)}(t) U_n(t)\, dt.$$

b. Montrer qu'il existe deux fonctions polynomiales P_n et Q_n, à coefficients entiers et de degré n, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\; x^{n+1} T_n(x) = Q_n(x) e^x - P_n(x).$$

6. Montrer l'irrationalité de e^r pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ puis pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$. Montrer que $\ln \alpha$ est irrationnel pour $\alpha > 0$ rationnel et différent de 1.

Corrigé

Partie I. Résultats préliminaires

1. a. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. On veut montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Plusieurs raisonnements sont possibles.
Par majoration.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{x_{k+1}}{x_k} \leq \frac{1}{2}$ pour $k \geq N$. En multipliant ces inégalités pour k de N à $n-1 \geq N$, une simplification télescopique multiplicative se produit et on obtient

$$\frac{u_n}{u_N} \leq \frac{1}{2^{n-N}} \Rightarrow u_n \leq 2^N\, u_N\, \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, elle est donc convergente.
On peut aussi raisonner avec des limites.
Á partir d'un certain rang $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. La suite est donc strictement décroissante à partir d'un certain rang. Comme elle est positive, elle converge. Sa limite est 0 car sinon $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait vers 1.

b. La suite converge vers 0 car en posant $x_n = \frac{\lambda^n}{n!}$, on peut appliquer la première question :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\lambda}{n+1} \to 0.$$

2. Exprimons les dérivées de U_n à l'aide de la formule de Leibniz.

$$U_n^{(m)}(t) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (t^n)^{(i)} ((1-t)^n)^{(m-i)}.$$

Pour que i contribue vraiment à la somme, il faut que $i \leq n$ et $m - i \leq n$ c'est à dire $i \geq m - n$.

a. Si $m = k < n$, la deuxième condition est toujours réalisée et

$$U_n^{(k)}(t) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(n(n-1)\cdots\right) t^{n-i} \left((-1)^{m-i} n(n-1)\cdots\right) (1-t)^{n-m+i}.$$

Comme $n - i > 0$ et $n - m + i > 0$ ces dérivées sont nulles en 0 et 1.
Si on dispose des polynômes, on peut aussi remarquer que 0 et 1 sont des racines de multiplicité n du polynôme correspondant à U_n.

b. Si $m = n + k$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. La deuxième condition donne $i \geq m - n = k$.

$$U_n^{(n+k)}(t) = \frac{1}{n!}\sum_{i=k}^{n}\binom{n+k}{i}\left(n(n-1)\cdots\right)t^{n-i}\left((-1)^{m-i}n(n-1)\cdots\right)(1-t)^{i-k}.$$

Pour $U_n^{(m)}(0)$, seul $i = n$ contribue :

$$U_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!}\binom{n+k}{n}n!\left((-1)^k\underbrace{n(n-1)\cdots}_{k\text{ facteurs}}\right)(1-0)^{n-m+i} \in \mathbb{Z}.$$

Pour $U_n^{(m)}(1)$, seul $i = k$ contribue :

$$U_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!}\binom{n+k}{k}\left(\underbrace{n(n-1)\cdots}_{k\text{ facteurs}}\right)1^{n-k}(-1)^n n! \in \mathbb{Z}.$$

3. Formule d'intégration par parties itérée.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}_p$ la formule à vérifier

$$\mathcal{P}_p : \quad \int_a^b f^{(p)}(t)g(t)\,dt = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\left[f^{(p-k)}g^{(k-1)}\right]_a^b + (-1)^p\int_a^b f(t)g^{(p)}(t)\,dt.$$

Pour $p = 1$, il s'agit de la formule d'intégration par parties usuelle

$$\begin{aligned}\int_a^b f^{(1)}(t)g(t)\,dt &= \sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1}\left[f^{(p-k)}g^{(k-1)}\right]_a^b + (-1)^p\int_a^b f(t)g^{(p)}(t)\,dt \\ &= \left[f^{(0)}g^{(0)}\right]_a^b - \int_a^b f(t)g^{(1)}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Montrons que $\mathcal{P}_p$ entraine $\mathcal{P}_{p+1}$. On commence par une intégration par parties puis on utilise $\mathcal{P}_p$.

$$\begin{aligned}\int_a^b f^{(p+1)}(t)g(t)\,dt &= \left[f^{(p)}g\right]_a^b - \int_a^b f^{(p)}(t)g'(t)\,dt \\ &= \left[f^{(p)}g\right]_a^b - \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\left[f^{(p-k)}g^{(k)}\right]_a^b + (-1)^{p+1}\int_a^b f(t)g^{(p+1)}(t)\,dt \\ &= \left[f^{(p)}g\right]_a^b + \sum_{k=2}^{p+1}(-1)^{k-1}\left[f^{(p+1-k)}g^{(k-1)}\right]_a^b + (-1)^{p+1}\int_a^b f(t)g^{(p+1)}(t)\,dt.\end{aligned}$$

En posant $k' = k + 1$ dans la somme puis en revenant au nom k pour l'indice de sommation. Le premier crochet correspond à celui d'indice 1 dans la somme. On a bien montré $\mathcal{P}_{p+1}$.

4. a. Par définition, 1 et ω appartiennent à $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$ car $1 = 1 + o\omega$ et $\omega = 0 + 1\omega$. Il existe donc p et q dans $\mathbb{Z}^*$ tels que

$$\left.\begin{aligned}1 &= q\,a \\ \omega &= p\,a\end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

b. On suppose $\omega = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers non nuls et premiers entre eux. On pose $a = \frac{1}{q}$.

i. Pour tout $z \in \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$, il existe $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$z = k + k'\omega = k + k'\,\frac{p}{q} = (qk + k'p)\frac{1}{q} = (qk + k'p)a \in \mathbb{Z}a.$$

ii. Réciproquement, on admet qu'il existe u et v entiers tels que $up + vq = 1$ (théorème de Bezout). Pour tout $z \in \mathbb{Z}a$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$z = ka = k\,\frac{up + vq}{q} = kv + ku\frac{p}{q} \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega.$$

5. a. Par définition de la convergence d'une suite vers 0, il existe N tel que

$$n \geq N \Rightarrow |k_n| < 1 \Rightarrow k_n = 0 \text{ car } k_n \in \mathbb{Z}.$$

b. Si la suite $(q_n\omega - p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $(\lambda q_n\omega - \lambda p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0 pour n'importe quel réel λ.
Si ω est rationnel, on peut choisir un λ entier égal au dénominateur de ω de sorte que $(\lambda q_n\omega - \lambda p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombre entier qui converge vers 0. On a alors une contradiction entre le fait que cette suite est nulle à partir d'un certain rang et la fait qu'elle ne s'anulle pas. Ainsi ω est forcément irrationnel.

Partie II. Irrationalités

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement croissante avec $u_n < v_n$ et $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$. Pour montrer le caractère adjacent, il reste à prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Cela

vient de :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!} = \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)\,(n+1)!}$$
$$= -\frac{1}{n(n+1)\,(n+1)!} < 0.$$

L'encadrement que l'on nous demande de vérifier est strict. Or le passage à la limite dans une inégalité conduit à des inégalités *larges*. On procède donc en deux temps. Par passage à la limite : $u_{n+1} \leq e \leq v_{n+1}$. Par la stricte monotonie des suites :

$$u_n < u_{n+1} \leq e \leq v_{n+1} < v_n.$$

2. En multipliant u_n par $n!$, tous les dénominateurs se simplifient. On en déduit que $n!\,u_n \in \mathbb{N}^*$. De plus, à partir de $u_n < e < v_n$, on déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < n!\,e - n!\,u_n < \frac{1}{n}.$$

Si e était rationnel, $n!\,e$ serait entier à partir d'un certain rang et donc $n!\,e - n!\,u_n$ serait un entier dans $]0,1[$ ce qui est absurde. On en déduit que e est irrationnel.

3. La fonction polynomiale U_n est de degré $2n$, la fonction L_n, obtenue en dérivant n fois est de degré n.

4. a. Utilisons la formule d'intégration par partie itérée (question I.3.) avec $a = 0$, $b = 1$, $f = U_n$, $p = n$, $g(t) = e^{xt}$.

$$T_n(x) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (-x)^{k-1} \left[T_n^{(n-k)}\, e^{xt} \right]_0^1}_{=0} + (-x)^n \int_0^1 U_n(t)\, e^{xt}\, dt$$

Chaque crochet de la somme est nul d'après la question I.2.a. (0 et 1 sont des racines de T_n de multiplicité n).
Il reste à vérifier que $T_n(x) \neq 0$. Remarquons que $t \mapsto e^{xt}\, t^n(1-t)^n$ est strictement positive dans $]0,1[$. On en déduit que sa primitive est strictement croissante dans $[0,1]$ donc

$$\int_0^1 e^{xt}\, U_n(t)\, dt > 0 \Rightarrow T_n(x) = (-x)^n \int_0^1 U_n(t)\, e^{xt}\, dt \neq 0.$$

b. En dérivant, on montre que $t \mapsto t(1-t)$ atteint sa valeur maximale en $\frac{1}{2}$.
On en déduit

$$\forall t \in [0,1]\,,\ 0 \leq t(1-t) \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq U_n(t) \leq \frac{1}{4^n\, n!}$$
$$\Rightarrow |T_n(x)| \leq |x|^n \int_0^1 \frac{e^{xt}}{4^n}\, dt = \frac{|x|^n}{4^n\, n!}\, \frac{e^x - 1}{x}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction exponentielle entre 0 et x,

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0}$$
$$\leq \text{plus grande valeur de l'exponentielle entre } 0 \text{ et } x = \max(1, e^x).$$

En multipliant par $|x|^n$, on obtient bien

$$|x^n\, T_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{4^n\, n!}\, \max(1, e^x).$$

c. On peut appliquer le résultat de la question I.1.b à la suite $\left(\frac{x^{2n}}{4^n\, n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\lambda = \frac{x^2}{4}$. On en déduit par le théorème d'encadrement des suites que $(x^n T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

5. a. Comme $\psi_x^{(2n+1)}(t) = x^{2n+1}\, e^{xt}$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^{n+1}\, T_n(x) = (-1)^n \int_0^1 \psi_x^{(2n+1)}(t) U_n(t)\, dt$$

en multipliant le relation de la question II.4.a. par x^{n+1}.

b. On applique la formule d'intégration par parties itérée avec $p = 2n+1$, $f = \psi_x$ et $g = U_n$.

$$\int_0^1 \psi_x^{(2n+1)}(t) U_n(t)\, dt = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \left[x^{2n+1-k} e^{xt}\, U_n^{(k-1)}(t) \right]_0^1$$
$$+ (-1)^{2n+1} \underbrace{\int_0^1 e^{xt}\, U_n^{(2n+1)}(t)\, dt}_{=0}$$

La dernière intégrale est nulle car la fonction polynomiale U_n est de degré $2n$. On obtient donc

$$x^{n+1}T_n(x) = Q_n(x)e^x - P_n(x)$$

avec

$$Q_n(x) = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{n+k+1} U_n^{(k-1)}(1)\, x^{2n+1-k},$$
$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{n+k+1} U_n^{(k-1)}(0)\, x^{2n+1-k}.$$

Il s'agit bien de fonctions polynomiales. De plus, d'après les questions I.2. a. et b., seuls les $k \in [\![n+1, 2n+1]\!]$ contribuent à la somme et les $U_n^{(k-1)}(0)$ et $U_n^{(k-1)}(1)$ sont des entiers donc les fonctions P_n et Q_n sont polynomiales à coefficients entiers et de degré au plus n.

6. On applique la condition suffisante d'irrationalité (résultat de la question I.5.b.) avec $\omega = e^r$ (pour r entier non nul), $p_n = P_n(r)$ et $q_n = Q_n(r)$.
   Comme P_n et Q_n sont à coefficients entiers, p_n et q_n sont entiers. De plus :
   - $r^{n+1}T_n(r) \neq 0$ d'après la deuxième propriété de II.4.a.
   - $(q_n e^r - p_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(r^{n+1}T_n(r)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 d'après II.4.c.

   Le résultat de la question I.5.b. assure alors que e^r est irrationnel.
   Soit $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On sait alors que e^p est irrationnel.
   Comme $e^p = \left(e^{\frac{p}{q}}\right)^q$, on en déduit que $e^{\frac{p}{q}}$ est irrationnel car s'il était rationnel, sa puissance q le serait aussi.
   Soit $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ et $\beta = \ln\alpha$ réel non nul. Alors $\alpha = e^\beta$. D'après le résultat précédent :

$$\left(\beta \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha = e^\beta \notin \mathbb{Q}\right) \Leftrightarrow \left(\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \beta = \ln\alpha \notin \mathbb{Q}\right).$$