Énoncé

Cet exercice[1] porte sur les déterminants des matrices à coefficients dans $\{0,1\}$. Dans ce texte, n est un entier supérieur ou égal à 2 et on note :
- $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$,
- $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
- $\mathcal{X}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0,1\}$,
- $\mathcal{Y}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $[0,1]$,

I. Généralités

1. Justifier que $\mathcal{X}_n$ est un ensemble fini et préciser son cardinal.
2. Démontrer que $|\det(M)| < n!$ pour tout $M \in \mathcal{Y}_n$.
3. Soit $M \in \mathcal{Y}_n$ et λ une valeur propre complexe de M c'est à dire
$$\lambda \in \mathbb{C}, \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} \text{ tq } MX = \lambda X.$$
Montrer que $|\lambda| \leq n$ et donner un exemple explicite où l'on a l'égalité.
4. Étude de $\mathcal{X}'_n = \mathcal{X}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$.
   a. Faire la liste des éléments de $\mathcal{X}'_2$.
   b. Montrer que $\mathcal{X}'_2$ engendre $\mathcal{M}_2$. La propriété $\mathrm{Vect}(\mathcal{X}'_n) = \mathcal{M}_n$ est-elle vraie pour $n \geq 2$?

II. Maximisation du déterminant

1. Justifier l'existence de
$$x_n = \max\{\det(M), M \in \mathcal{X}_n\} \qquad y_n = \sup\{\det(M), M \in \mathcal{Y}_n\}.$$
2. Montrer que la suite $(y_k)_{k\geq 2}$ est croissante.
3. Soit $J \in \mathcal{X}_n$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. On pose $M = J - I_n$. calculer $\det(M)$ et en déduire que $(y_k)_{k\geq 2}$ tend vers $+\infty$.
4. Soit $N \in \mathcal{Y}_n$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $n_{i,j}$ les coefficients de N et supposons que pour un (i_0, j_0) fixé on ait $0 < n_{i_0,j_0} < 1$.
   a. Montrer qu'en remplaçant n_{i_0,j_0} soit par 0 soit par 1, on peut obtenir une matrice $N' \in \mathcal{Y}_n$ telle que $\det(N) \leq \det(N')$.
   b. Montrer que $x_n = y_n$.

[1] d'après Math 1 PSI Concours Centrale-Supelec 2016

Corrigé

I. Généralités

1. L'ensemble $\mathcal{X}_n$ s'identifie aux fonctions de $[\![1,n]\!]^2$ dans $\{0,1\}$, il est donc fini et de cardinal
$$2^{(n^2)}$$
2. Exprimons le déterminant avec des permutations
$$|\det(M)| = \left| \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j\in[\![1,n]\!]} m_{\sigma(j)j} \right| \leq \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} |\varepsilon(\sigma)| \prod_{j\in[\![1,n]\!]} |m_{\sigma(j)j}|$$
Tous les facteurs sont entre 0 et 1 donc tous les $n!$ termes de la somme sont plus petits que 1 d'où $|\det(M)| \leq 1$.
3. Soient A et B dans $\mathcal{Y}_n$ et λ entre 0 et 1. Considérons $M_\lambda = \lambda A + (1-\lambda)B$. Ses coefficients vérifient
$$\text{terme } i,j \text{ de } M_\lambda = \lambda a_{i,j} + (1-\lambda) b_{i,j} \in [0,1]$$
Donc $M_\lambda \in \mathcal{Y}_n$ ce qui prouve que $\mathcal{Y}_n$ est convexe.
4. Comme la colonne propre X est non nulle, il existe un indice i tel que $0 < |x_i| \geq |x_j|$ pour tous les autres j. On en déduit, en examinant la ligne i du produit MX :
$$|\lambda||x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|m_{i,j}|}_{\leq 1} \underbrace{|x_j|}_{\leq |x_i|} \leq n|x_i| \Rightarrow |\lambda| \leq n$$
Si M est la matrice ne contenant que des 1 et X la colonne ne contenant que des 1, on a $MX = nX$. Il est donc possible d'obtenir des valeurs propres de module n.
5. a. Parmi les 16 matrices d'ordre 2 formées de 0 et de 1, on liste d'abord celles qui ne contiennent ni ligne ni colonne nulle en considérant les premières lignes possibles (il y en a 3) :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rémy Nicolai Amat5abr

On élimine la dernière qui est de rang 1. Il en reste donc 6.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

b. Elles engendrent les matrices élémentaires car

$$E_{1,1} = E - A,\ E_{1,2} = D - I,\ E_{2,1} = C - I,\ E_{2,2} = B - A$$

Dans le cas général de l'ordre n. Si $i \neq j$, la matrice $I_n + E_{i,j}$ est une matrice d'opérations élémentaire donc dans $\mathcal{X}'_n$. Ceci montre que $E_{i,j} \in \operatorname{Vect}(\mathcal{X}'_n)$. Pour les $E_{i,i}$, on utilise la matrice D avec des 1 sur la « mauvaise » diagonale ($d_{i,j} = \delta_{n-j+1,i}$) car $D + E_{i,i}$ est encore inversible. On engendre ainsi tous les $E_{i,i}$ sauf $E_{p,p}$ lorsque $n = 2p+1$. On pourra également l'obtenir comme combinaison mais avec plus de deux matrices. La propriété reste donc vraie à l'ordre n. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + 2I - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le raisonnement est sans doute plus clair avec les matrices de permutations qui sont des éléments de $\operatorname{Vect}(\mathcal{X}'_n)$.
Pour n'importe quel couple (i,j), il existe des permutations σ telles que $\sigma(j) \neq i$. Le terme i,j de P_σ est alors nul. La matrice $P' = E_{ij} + P_\sigma$ est inversible car son déterminant est $\varepsilon(\sigma)$. En effet σ est la seule permutation qui contribue au déterminant à cause de la contrainte imposée par les $n-1$ colonnes (autres que la j-ème) qui ne contiennent qu'un seul terme non nul. De plus $P' \operatorname{Vect}(\mathcal{X}'_n)$ car elle ne contient que des 0 et des 1 don :

$$E_{ij} = P' - P_\sigma \in \operatorname{Vect}(\mathcal{X}'_n).$$

II. Maximisation du déterminant

1. Comme $\mathcal{X}_n$ est fini, l'ensemble des déterminants l'est aussi donc il admet un plus grand élément.
L'ensemble $\mathcal{Y}_n$ est infini donc on ne peut affirmer que l'ensemble des déterminants soit fini. En revanche, on sait d'après I.2. qu'il est majoré. Comme toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée il admet une borne supérieure y_n.

2. Le nombre y_{n+1} est un majorant de $\{\det(M), M \in \mathcal{Y}_n\}$. En effet, pour toute $M \in \mathcal{Y}_n$, on peut former une matrice $M' \in \mathcal{Y}_{n+1}$ de même déterminant en la bordant par des 0 avec seulement un 1 en position $1,1$. Comme y_n est le plus petit des majorants, on en déduit $y_n \leq y_{n+1}$.

3. Notons $X_1, \cdots, X_n$ les colonnes de la base canoniques des matrices colonnes et C la colonne qui ne contient que des 1. On peut alors écrire

$$C_j(J) = C - X_j$$

Développons le déterminant de M par multilinéarité par rapport aux colonnes. Seuls contribuent les distributions où C figure au plus une fois. On en déduit

$$\begin{aligned}\det(M) &= (-1)^n \det(I) + (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \det(X_1, \cdots, X_{j-1}, C, X_{j+1}, \cdots, X_n) \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)\end{aligned}$$

Ces matrices montrent que la suite des y_n diverge vers $+\infty$ pour les n impairs. Pour les n pairs, il suffit de modifier la matrice en permutant deux lignes ou colonnes.

4. a. On suppose $n_{i_0,j_0} \in]0,1[$, considérons le développement du déterminant selon la colonne j_0. Dans ce développement, le coefficient n_{i_0,j_0} intervient seulement dans le terme

$$n_{i_0,j_0} C_{i_0,j_0}$$

où C_{i_0,j_0} désigne le cofacteur. Si ce cofacteur est positif ou nul, en remplaçant n_{i_0,j_0} par 1, on augmente le déterminant. Si le cofacteur est strictement négatif, en remplaçant cette fois n_{i_0,j_0} par 0 on l'augmente aussi. On peut donc former une matrice N' comme le demande l'énoncé.

b. Pour une matrice M quelconque dans $\mathcal{Y}_n$, en procédant systématiquement comme dans la question précédente, on peut remplacer tous les coefficients dans l'intervalle ouvert par des 0 ou des 1 et obtenir finalement une matrice $M' \in \mathcal{X}_n$ telle que $\det(M) \leq \det(M')$. On en déduit que x_n est un majorant de y_n donc que $x_n = y_n$.