

## Énoncé

Dans ce texte<sup>1</sup>,  $n$  désigne un naturel supérieur ou égal à 2.

Une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite *bistochastique* si et seulement si ses coefficients sont dans  $[0, 1]$  et toutes les sommes par ligne et par colonne sont égales à 1 c'est à dire

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, b_{ij} \in [0, 1] \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n b_{ik} = \sum_{k=1}^n b_{kj} = 1.$$

Pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on désigne par  $P_\sigma$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \text{ terme } i, j \text{ de } P_\sigma = \delta_{i\sigma(j)}.$$

On note  $\mathcal{B}$  l'ensemble des matrices bistochastiques. On définit aussi une matrice ligne et une matrice colonne particulières :

$$L = (1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}), \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

### I. Convexité

On se place dans un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ .

Soit  $p \geq 2$  entier naturel et  $u_1, \dots, u_p$  des vecteurs  $E$ . Les vecteurs

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k u_k \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \quad \text{et} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in [0, 1]^p$$

sont appelés des *combinaisons convexes* de  $u_1, \dots, u_p$ .

On note  $\mathcal{C}(\{u_1, \dots, u_p\})$  l'ensemble des combinaisons convexes des vecteurs  $u_1, \dots, u_p$ . On admet que c'est une partie convexe.

Dans le cas particulier de deux vecteurs, on note  $[u_1, u_2] = \mathcal{C}(u_1, u_2)$ .

On dit qu'une partie  $\Omega$  de  $E$  est convexe si et seulement si

$$\forall (u, v) \in \Omega^2, [u, v] \subset \Omega.$$

Soit  $\Omega$  une partie convexe de  $E$  et  $u \in \Omega$ . On dit que  $u \in \Omega$  est un *point extrémal* de  $\Omega$  si et seulement si

$$\forall (a, b) \in \Omega^2, u \in [a, b] \Rightarrow u \in \{a, b\}.$$

<sup>1</sup>tiré de *The Cauchy-Schwarz Master Class*

1. Montrer que, pour tous  $u$  et  $v$  dans  $E$ ,

$$[u, v] = [v, u] = \{\lambda u + (1 - \lambda)v, \lambda \in [0, 1]\} = \{\mu v + (1 - \mu)u, \mu \in [0, 1]\}.$$

2. Exemple. Dans  $E = \mathbb{R}^3$ , on note

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1), \quad \mathcal{T} = \mathcal{C}(e_1, e_2, e_3).$$

Montrer que

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, x_2, x_3) \in [0, 1]^3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Montrer qu'une partie convexe  $\Omega$  de  $E$  est stable par combinaisons convexes. C'est à dire que, pour tout  $p \geq 2$  et tous vecteurs  $u_1, \dots, u_p$  de  $\Omega$ , les combinaisons convexes de ces vecteurs sont encore dans  $\Omega$ .

4. On reprend l'exemple de la question 2.

a. Montrer que  $e_1, e_2, e_3$  sont des points extrémaux de  $\mathcal{T}$ .

b. Soit  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{T}$  avec  $0 < x_2 \leq x_1 < 1$  et

$$\forall t \in \mathbb{R}, x_t = (x_1 + t, x_2 - t, x_3).$$

Montrer qu'il existe des  $t$  non nuls tels que  $x_t$  et  $x_{-t}$  soient dans  $\mathcal{T}$ . En déduire que  $x$  n'est pas un point extrémal de  $\mathcal{T}$ .

c. Montrer que si  $x$  est un point extrémal de  $\mathcal{T}$  alors c'est l'un des  $e_i$ .

### II. Matrices bistochastiques

1. a. Soit  $\sigma$  et  $\theta$  dans  $\mathfrak{S}_n$ . Montrer que  $P_\theta P_\sigma = P_{\theta \circ \sigma}$ ,  ${}^t P_\theta = P_{\theta^{-1}}$ . Que vaut  $\det P_\sigma$  ?

b. Montrer que les matrices de permutation sont bistochastiques.

2. Dans cette question, toutes les matrices sont  $2 \times 2$ .

a. Préciser la forme des matrices bistochastiques. Quelles sont les matrices de permutation ?

b. Soit  $B$  bistochastique qui n'est pas une matrice de permutation. Former  $B_1$  et  $B_2$  bistochastiques telles que

$$B = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 \quad \text{avec} \quad B_1 \neq B \quad \text{et} \quad B_2 \neq B.$$

En déduire que toute matrice bistochastique extrémale est une matrice de permutation.

3. Opérations sur les matrices bistochastiques.
  - a. Soit  $B$  bistochastique et  $Y$  une matrice colonne dont la somme des termes vaut 1. Montrer que  $BY$  une matrice colonne dont la somme des termes vaut 1.
  - b. Montrer qu'une matrice  $B$  à coefficients positifs est bistochastique si et seulement si  $LB = \bar{L}$  et  $BC = C$ .
  - c. Montrer que le produit de matrices bistochastiques est bistochastique.
  - d. Montrer qu'une combinaison convexe de matrices bistochastiques est bistochastique. En déduire que l'ensemble  $\mathcal{B}$  des matrices bistochastiques est convexe.
4. Montrer qu'une matrice de permutation est un point extrémal de  $\mathcal{B}$ .
5. Notons  $\mathcal{E}$  la partie de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  formée par les matrices  $M$  dont la somme des termes par ligne et par colonne est toujours nulle et considérons l'application  $\Phi$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$  qui à une matrice  $M$  associe la matrice extraite obtenue en supprimant la ligne  $n$  et la colonne  $n$ .
  - a. Montrer que  $\mathcal{E}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et que  $\Phi$  est linéaire.
  - b. Montrer que  $\Phi$  est injective.
  - c. Montrer que  $\Phi$  est surjective.
  - d. En déduire  $\dim(\mathcal{E}) = (n-1)^2$ .
6.
  - a. Soit  $B$  bistochastique avec  $2n$  coefficients non nuls. Montrer qu'il existe  $E \in \mathcal{E}$  telle que  $B_t = B + tE$  soit bistochastique pour  $|t|$  assez petit. En déduire que  $B$  n'est pas extrémale.
  - b. Soit  $B$  bistochastique avec au plus  $2n-1$  coefficients non nuls. Montrer qu'il existe  $i$  et  $j$  tels que  $b_{ij} = 1$  soit le seul terme non nul de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$ .
7. Montrer que tout point extrémal de l'ensemble des matrices bistochastiques est une matrice de permutation.

### III. Majorisation

On se place dans l'ensemble des matrices colonnes  $\mathcal{M}_{n,1}([0,1])$  pour lesquelles la somme des termes vaut 1.

Pour une telle matrice colonne  $X$ , notons  $S_X = \{P_\sigma X, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$  et  $C_X = \mathcal{C}(S_X)$ .

Par définition,  $S_X$  et  $C_X$  sont des parties de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On admet que  $C_X$  est convexe.

1. Justifier que  $S_X$  est fini. Majorer son cardinal. Soit  $\theta$  et  $\sigma$  dans  $\mathfrak{S}_n$ . Montrer que

$$X \in C_Y \Rightarrow P_\theta X \in C_{P_\sigma Y}.$$

2. Soit  $Y$  une colonne et  $X \in C_Y$ . Montrer qu'il existe une fonction  $\pi$  de  $\mathfrak{S}_n$  dans  $[0,1]$  telle que

$$X = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \pi(\sigma) P_\sigma Y \text{ avec } \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \pi(\sigma) = 1.$$

En déduire qu'il existe une matrice bistochastique  $B$  telle que  $X = BY$ . Que vaut le terme d'indice  $i, j$  de  $B$ ?

3. On souhaite étudier si  $X \in C_Y$ . Justifier que l'on peut supposer

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ avec } x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \text{ et } y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n.$$

Dans toute la suite, les colonnes  $X$  et  $Y$  vérifient ces propriétés. Ne pas oublier que l'on a aussi

$$x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n = 1.$$

4.
  - a. On suppose qu'il existe une matrice bistochastique  $B$  telle que  $X = BY$ . Soit  $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , préciser les réels  $c_1, \dots, c_n$  tels que

$$\sum_{k=1}^j x_k = \sum_{k=1}^n c_k y_k.$$

Vérifier que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq c_k \leq 1$  et  $\sum_{k=1}^n c_k = j$ .

- b. On suppose toujours  $X = BY$  avec  $B$  bistochastique. Montrer que

$$\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \sum_{k=1}^j x_k \leq \sum_{k=1}^j y_k.$$

On note  $X \prec Y$  cette propriété et on dit alors que  $Y$  majorise  $X$ . Pour le montrer on peut considérer

$$\sum_{k=1}^j x_k - \sum_{k=1}^j y_k = \sum_{k=1}^n c_k y_k + y_j \left( - \left( \sum_{k=1}^n c_k \right) + j \right) - \sum_{k=1}^j y_k.$$

- c. En déduire  $X \in C_Y \Rightarrow X \prec Y$ .

5. On suppose que  $X \prec Y$ . C'est à dire que

$$\forall l \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \sum_{k=1}^l x_k \leq \sum_{k=1}^l y_k.$$

On suppose aussi  $X \neq Y$  et on note  $p$  le nombre d'indices  $k$  tels que  $x_k \neq y_k$ .

- Montrer que  $p \geq 2$ .
- On définit  $i$  et  $j$  comme le plus petit et le plus grand des  $k$  tels que  $x_k \neq y_k$ .  
Montrer que  $i < j$  et  $y_j < x_j \leq x_i < y_i$ .
- Préciser  $\lambda \in [0, 1]$  tel que  $x_i = \lambda y_i + (1 - \lambda) y_j$ . On pose

$$B_\lambda = \lambda I_n + (1 - \lambda) P_{(ij)} \quad \text{et} \quad Y' = B_\lambda Y.$$

Montrer que  $X \prec Y'$  et que le nombre d'indices  $k$  tels que  $x_k \neq y'_k$  est strictement plus petit que  $p$ .

6. Montrer que  $X \prec Y$  entraîne  $X \in C_Y$ .

## Corrigé

Le corrigé de mat6 est incomplet. Il manque la rédaction des questions « faciles ».

### I. Convexité

- 
- 
- 
- Montrons que  $e_1$  est extrémal car le raisonnement sera le même pour  $e_2$  et  $e_3$ .  
Supposons  $e_1 \in [a, b]$  (c'est à dire combinaison convexe de  $a$  et  $b$ ) avec  $a = (a_1, a_2, a_3)$  et  $b = (b_1, b_2, b_3)$  dans  $\mathcal{T}$  donc tous les  $a_i, b_j$  entre 0 et 1. Il s'agit de montrer que  $e_1$  est au  $b$ .  
Chaque coordonnée de  $e_1$  est combinaison convexe des coordonnées correspondantes de  $a$  et  $b$ . Donc

$$1 \in [a_1, b_1] \Rightarrow 1 = b_1 \Rightarrow b = e_1 \text{ car } b_1 + b_2 + b_3 = 1 \text{ avec les } b_i \text{ entre 0 et 1.}$$

En fait on démontre aussi que  $a = e_1$  avec  $0 \in [a_2, b_2]$  et  $0 \in [a_3, b_3]$ .

- La condition  $x_t \in \mathcal{T}$  se traduit par un système de 4 inégalités car la somme des coordonnées est toujours 1.

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x_1 + t \leq 1 \\ 0 \leq x_2 - t \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow t \in [\max(-x_1, x_2 - 1), \min(x_2, 1 - x_1)]$$

$$\Leftrightarrow t \in [-\min(x_1, 1 - x_2), \min(x_2, 1 - x_1)]$$

Posons  $\rho = \min(x_1, 1 - x_2, x_2, 1 - x_1) = \min(x_2, 1 - x_1)$  avec les hypothèses.  
Alors  $0 < t < \rho$  entraîne  $x_t$  et  $x_{-t}$  dans  $\mathcal{T}$  et différents de  $x$ . Or

$$x = \frac{1}{2}x_t + \frac{1}{2}x_{-t} \in ]x_t, x_{-t}[$$

ce qui signifie que  $x$  n'est pas un point extrémal.

- Si  $x$  n'est pas un des  $e_i$ , au moins une de ses coordonnées est dans  $]0, 1[$ . Il doit en exister une autre car la somme vaut 1. On se retrouve dans une situation analogue au a. ce qui entraîne que  $x$  n'est pas extrémal. Les seuls points extrémaux sont donc les  $e_i$ .

## II. Matrices bistochastiques

1. a.
- b.
2. a.
- b.
3. Opérations sur les matrices bistochastiques.
  - a.
  - b.
  - c.
  - d.
4. On veut montrer qu'une matrice de permutation est un point extrémal de l'ensemble des matrices bistochastiques.  
 Montrons d'abord que la matrice identité (qui est une matrice de permutation particulière) est extrémale. Supposons  $I \in [A, B]$  avec  $A$  et  $B$  bistochastiques et

$$I = tA + (1 - t)B \text{ avec } 0 \leq t \leq 1.$$

On veut montrer que  $I$  est  $A$  ou  $B$ . Logiquement, cela revient à montrer

$$B \neq I \Rightarrow A = I.$$

Supposons  $B \neq I$ . Il existe  $i$  tel que  $b_{ii} < 1$ . Pour simplifier, on supposera  $b_{11} < 1$ . Comme 1 (terme 11 de  $I$ ) est entre  $a_{11}$  et  $b_{11}$  et que  $a_{11}$  est entre 0 et 1, on a  $a_{11} = 1$ . La somme des termes de la première ligne ou de la première colonne de  $A$  vaut 1, donc  $a_{11} = 1$  est le seul terme non nul de cette ligne et de cette colonne. Il s'agit de montrer que  $t = 1$ . Pour cela considérons le terme 11 de l'égalité matricielle

$$\left. \begin{array}{l} t < 1 \\ b_{11} < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow ta_{11} + (1 - t)b_{11} = t + (1 - t)b_{11} < t < 1$$

en contradiction avec le fait que ce terme est égal au terme 11 de  $I$  c'est à dire 1. On en déduit  $t = 1$  et  $A = I$ .

Il reste à montrer que n'importe quelle matrice de permutation  $P_\sigma$  est extrémale. Soit  $P_\sigma \in [A, B]$  avec  $A$  et  $B$  extrémales. On peut tout multiplier par la matrice de permutation inverse  $P_{\sigma^{-1}}$ . Donc  $I \in [A', B']$  avec  $A' = P_{\sigma^{-1}}A$  et  $B' = P_{\sigma^{-1}}B$ . Les matrices  $A'$  et  $B'$  sont bistochastiques comme produits de matrices bistochastiques (II.3.b). Comme  $I$  est extrémale, elle est égale à  $A'$  ou  $B'$ . Par exemple

$$I = A' = P_{\sigma^{-1}}A \Rightarrow P_\sigma = A.$$

5. Étude de  $\mathcal{E}$  : matrices dont les sommes des termes par ligne et colonne sont nulles.
  - a. On vérifie les propriétés assurant que  $\mathcal{E}$  est un sous-espace et que  $\Phi$  est linéaire.
  - b. On veut montrer que  $\Phi$  est injective. Soit  $M \in \mathcal{E}$  dans  $\ker \Phi$ . Le bloc  $(n-1) \times (n-1)$  en haut à gauche de  $M$  est nul. Comme pour les  $n-1$  premières lignes, la somme des termes est nulle, on obtient que les  $n-1$  premiers termes de la colonne  $n$  sont nuls. Le dernier terme de cette colonne est aussi nul car la somme est nulle. On raisonne de même avec les  $n-1$  premières colonnes et on obtient que les  $n-1$  premiers termes de la dernière ligne sont nuls. Ainsi  $M$  est la matrice nulle, ce qui assure l'injectivité de  $\Phi$ .
  - c. On veut montrer que  $\Phi$  est surjective. Soit  $A \in \mathcal{M}_{n-1}$  quelconque. On veut trouver  $M \in \mathcal{E}$  tel que  $\Phi(M) = A$ .

Par définition, de  $\Phi$ , le bloc en haut à gauche de  $M$  doit être  $A$  :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2, m_{ij} = a_{ij}.$$

Il reste à définir  $m_{1n}, \dots, m_{n-1n}, m_{n1}, \dots, m_{nn-1}$  et  $m_{nn}$ .

On définit les premières valeurs avec les premières lignes et colonnes

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, m_{kn} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ki}, m_{nk} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ik}.$$

On peut définir  $m_{nn}$  avec la dernière ligne :

$$m_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ni}.$$

Mais il faut alors vérifier que la somme des termes de la dernière colonne est bien nulle.

$$\sum_{k=1}^n m_{kn} = \sum_{k=1}^n \left( -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ki} \right) = -\sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{\left( \sum_{k=1}^n a_{ki} \right)}_{=0} = 0 \Rightarrow M \in \mathcal{E}.$$

- d. Comme  $\Phi$  est un isomorphisme, il conserve la dimension donc  $\dim(\mathcal{E}) = (n-1)^2$ .
6. a. Soit  $B$  bistochastique avec  $2n$  coefficients non nuls. Il existe donc  $2n$  couples  $(i, j)$  tels que  $b_{ij} \neq 0$ . Notons  $V$  le sous-espace vectoriel engendré par les matrices élémentaires  $E_{ij}$  attachées à ces couples. Par définition  $\dim V = 2n$ . Donc :

$$\dim \mathcal{E} + \dim V = (n-1)^2 + 2n = n^2 + 1 > n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On en déduit que  $\mathcal{E} \cap V$  ne se réduit pas à la matrice nulle. Notons  $E$  une matrice non nulle dans cette intersection et posons  $B_t = B + tE$ . Les matrices  $B$  et  $B_t$  coïncident pour tous les couples d'indices sauf sur les  $2n$  couples  $(i, j)$  pour lesquels  $b_{ij} > 0$ . Pour un tel couple, le terme  $i, j$  de  $B_t$  est  $b_{ij} + t$ . Il existe donc un intervalle ouvert contenant 0 assez petit pour que tous ces termes soient strictement positifs. Comme  $B \in \mathcal{E}$  les sommes des termes des lignes et des colonnes sont les mêmes pour  $B$  et  $B_t$  donc  $B_t$  est bien bistochastique. On a alors

$$B = \frac{1}{2}B_t + \frac{1}{2}B_{-t} \Rightarrow B \in ]B_t, B_{-t}[$$

Ce qui entraîne que  $B$  n'est pas extrémale.

- b. Soit  $B$  bistochastique avec au plus  $2n - 1$  coefficients non nuls. Il existe donc une colonne  $j$  contenant au plus un coefficient  $b_{ij} \neq 0$ . Comme la somme des termes de la colonne  $j$  est 1, on a  $b_{ij} = 1$ . La somme des termes de la ligne  $i$  vaut 1 donc tous les autres  $b_{ik}$  sont nuls.
7. Pour montrer que toute matrice bistochastique extrémale est une matrice de permutation, on raisonne par récurrence sur la taille  $n$  des matrices. On a vu que la propriété est vraie pour  $n = 2$ .

Considérons une matrice  $n \times n$  bistochastique extrémale. D'après 6.a. elle admet au plus  $2n - 1$  coefficients non nuls et d'après 6.b. il existe un couple  $(i, j)$  tel que  $b_{ij} = 1$  soit le seul terme non nul de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$ .

Notons  $B'$  la matrice extraite obtenue à partir de  $B$  en supprimant la ligne  $i$  et la colonne  $j$ . Par construction, elle est toujours bistochastique et extrémale mais de taille  $(n - 1) \times (n - 1)$ . D'après l'hypothèse de récurrence,  $B'$  est une matrice de permutation. Donc  $B'$  admet un seul terme égal à 1 par ligne et par colonne. La matrice complète  $B$  vérifie aussi cette propriété donc c'est une matrice de permutation.

### III. Majorisation

1. Par définition de  $S_X$ ,

$$\begin{aligned} X \in S_Y &\Leftrightarrow \exists \phi \in \mathfrak{S}_n \text{ tq } X = P_\phi Y \Leftrightarrow \exists \phi \in \mathfrak{S}_n \text{ tq } X = \underbrace{P_\phi P_{\sigma^{-1}}}_{=P_{\phi \circ \sigma^{-1}}} P_\sigma Y \\ &\Leftrightarrow \exists \phi' \in \mathfrak{S}_n \text{ tq } X = P_{\phi'} P_\sigma Y \Leftrightarrow X \in S_{P_\sigma Y}. \end{aligned}$$

On en déduit  $S_Y = S_{P_\sigma Y}$  donc  $C_Y = C_{P_\sigma Y}$ .

Si  $X$  est une combinaison convexe de  $P_\sigma Y$ , alors  $P_\theta X$  est aussi une combinaison convexe

de permutés de  $Y$  car pour chaque  $\sigma$ ,  $P_\theta P_\sigma Y = P_{\phi} Y$  avec  $\phi = \theta \circ \sigma$ . On en déduit

$$X \in C_Y \Leftrightarrow P_\theta X \in C_Y = C_{P_\sigma Y}.$$

2. Il s'agit simplement de la définition de  $C_Y$  comme ensemble des combinaisons complexes des permutés de  $Y$ . Pour chaque permutation  $\sigma$ ,  $\pi(\sigma)$  est le coefficient du  $P_\sigma Y$  dans la combinaison. Par linéarité, posons

$$B = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \pi(\sigma) P_\sigma.$$

Quels sont les  $\sigma$  qui contribuent au terme  $b_{ij}$ ? Uniquement ceux tels que  $\sigma(j) = i$ . On en déduit

$$b_{ij} = \sum_{\sigma \text{ tq } \sigma(j)=i} \pi(\sigma).$$

3. D'après la question 1., on ne change pas une relation  $X \in C_Y$  en multipliant  $X$  et  $Y$  par des matrices de permutations. On peut permuter les coefficients de  $X$  et de  $Y$  pour les ranger par ordre décroissant.
4. a. On suppose  $X = BY$  avec  $B$  bistochastique. Pour tout  $j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ ,

$$\sum_{k=1}^j x_k = \sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^n b_{ki} y_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^j b_{ki} \right) y_i = \sum_{i=1}^n c_i y_i \text{ avec } c_i = \sum_{k=1}^j b_{ki}.$$

Avec les notations de l'énoncé,

$$\sum_{k=1}^j x_k = \sum_{k=1}^n c_k y_k \text{ avec } c_k = \sum_{i=1}^j b_{ik}.$$

Les  $c_k$  sont positifs car  $B$  est positive et  $c_k = \sum_{i=1}^j b_{ik} \leq \sum_{i=1}^n b_{ik} = 1$ . De plus,

$$\sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j b_{ik} = \sum_{i=1}^j \underbrace{\sum_{k=1}^n b_{ik}}_{=1} = j.$$

- b. La relation que l'énoncé nous conseille de considérer est vraie car la parenthèse à droite du  $y_j$  est nulle à cause la question précédente  $\sum_{k=1}^n c_k = j$ . Suivons le

conseil.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^j x_k - \sum_{k=1}^j y_k &= \sum_{k=1}^n c_k y_k + y_j \left( - \left( \sum_{k=1}^n c_k \right) + j \right) - \sum_{k=1}^j y_k \\ &= \sum_{k=1}^n c_k (y_k - y_j) + \sum_{k=1}^j (y_j - y_k) = \sum_{k=1}^j \underbrace{(c_k - 1)}_{\leq 0} \underbrace{(y_k - y_j)}_{\geq 0} + \sum_{k=j+1}^n \underbrace{c_k (y_k - y_j)}_{\leq 0} \leq 0 \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^j x_k \leq \sum_{k=1}^j y_k. \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tous les  $j$ , on a bien  $X \prec Y$ .

c. On a vu en question 2 que  $X \in C_Y$  entraîne qu'il existe  $B$  bistochastique telle que  $X = BY$ . La question précédente entraîne  $X \prec Y$ .

5. a. Si  $X$  et  $Y$  sont deux colonnes égales sauf pour un seul indice, ils ne peuvent avoir la même somme de termes. Ici, la somme des termes de  $X$  et  $Y$  sont égales à 1 donc  $X \neq Y$  entraînent qu'au moins deux des coefficients sont distincts donc  $p \geq 2$ .
- b. Par définition  $i$  et  $j$  sont le plus petit et le plus grand des  $k$  tels que  $a_k \neq b_k$  donc  $i < j$  car il existe au moins deux de ces  $k$ .  
Si  $i = 1$  alors  $x_1 \leq y_1$  donc  $x_i < y_i$ . Si  $i > 1$ , on a

$$\left. \begin{array}{l} k < i \Rightarrow x_k = y_k \\ x_1 + \dots + x_i \leq y_1 + \dots + y_i \end{array} \right\} \Rightarrow x_i \leq y_i \Rightarrow x_i < y_i \text{ car } x_i \neq y_i.$$

De l'autre côté,

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + \dots + x_{j-1} \leq y_1 + \dots + y_{j-1} \\ x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y_j + \dots + y_n \leq x_j + \dots + x_n \\ \Rightarrow y_j \leq x_j \text{ car } k > j \Rightarrow x_k = y_k \Rightarrow y_j < x_j \text{ car } x_j \neq y_j.$$

En utilisant la décroissance des  $x$  et des  $y$ , il vient

$$y_j < x_j \leq x_i < y_i.$$

c. Comme  $x_i$  est entre  $y_j$  et  $y_i$ , on peut l'écrire comme une combinaison convexe.

$$x_i = \lambda y_i + (1 - \lambda) y_j \Leftrightarrow \lambda = \frac{x_i - y_j}{y_i - y_j} \in ]0, 1[.$$

On pose  $B_\lambda = \lambda I_n + (1 - \lambda) P_{(ij)}$  et  $Y' = B_\lambda Y$ .

Les coefficients de  $Y'$  sont égaux à ceux de  $Y$  sauf pour les indices  $i$  et  $j$  :

$$y'_i = \lambda y_i + (1 - \lambda) y_j, \quad y'_j = \lambda y_j + (1 - \lambda) y_i.$$

Avec  $y'_i = x_i$  par choix du  $\lambda$  et

$$y'_j = y_i + \lambda(y_j - y_i) = y_i - x_i + y_j \Rightarrow x_i - y_i + y'_j - y_j = 0.$$

Cette dernière relation servira plus loin Examinons les sommes partielles en supposant  $i < j$  :

$$l < i \Rightarrow \sum_{k=1}^l y'_k = \sum_{k=1}^l y_k \geq \sum_{k=1}^l x_k.$$

Pour la somme jusqu'à  $i$  utilisons que  $y'_i = x_i$  :

$$\sum_{k=1}^i y'_k = \sum_{k=1}^{i-1} y_k + y'_i = \sum_{k=1}^{i-1} y_k + x_i \geq \sum_{k=1}^{i-1} x_k + x_i = \sum_{k=1}^i x_k.$$

Pour les sommes jusqu'à  $j - 1$  l'inégalité est valable car les nouveaux  $y'_k$  sont égaux au  $y_k$ . Examinons la somme jusqu'à  $j$ .

$$\sum_{k=1}^j y'_k = \sum_{k=1}^j y_k + \underbrace{x_i - y_i + y'_j - y_j}_{=0} = \sum_{k=1}^j y_k \geq \sum_{k=1}^j x_k.$$

On a bien vérifié que  $X \prec Y'$  le nombre de  $k$  tels que  $x_k \neq y'_k$  est strictement plus petit que  $p$  à cause de  $y'_i = x_i$ .

6. On peut proposer une démonstration algorithmique de l'implication  $X \prec Y \Rightarrow X \in C_Y$  en utilisant la question précédente. Il existe des matrices bistochastiques  $B_1, B_2, \dots$  et des colonnes  $Y_1 = B_1 Y, Y_2 = B_2 Y_1$  telles  $X \prec Y_k$  tant que  $X \neq Y_k$ . Le nombre d'indices distincts décroît strictement donc il existe un  $k$  tel que

$$X = Y_k = B_k B_{k-1} \dots B_1 Y$$

avec  $B = B_k B_{k-1} \dots B_1$  bistochastique (produit de matrices bistochastiques) donc  $X \in C_Y$ .