

Énoncé

Dans tout le problème, p et q appartiennent à $]0, 1[$ et vérifient $p + q = 1$.
Pour tout $z \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on convient de noter

$$\binom{z}{n} = \frac{\overbrace{z(z-1)\cdots}^{n \text{ facteurs}}}{n!}.$$

I. Généralisation de sommes usuelles

Soit $r > 0$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty, 1[$ définie par :

$$\forall x < 1, f(x) = (1-x)^{-r}.$$

1. Dérivées de f .

- Calculer $f'(x)$, $f''(x)$. Exprimer $f^{(k)}(x)$ pour tout $x < 1$ et $k \in \mathbb{N}$.
- Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ comme un coefficient du binôme selon la convention de l'énoncé.

2. Changement de variable dans une intégrale. Soit $x \in]0, 1[$.

- On définit φ_x dans $[0, x]$ par :

$$\varphi_x(t) = \frac{x-t}{1-t}.$$

Montrer que φ_x définit une bijection de $[0, x]$ dans $[0, x]$ et que

$$\forall x \in]0, 1[, \forall t \in [0, x], \quad \frac{1}{1-t} = \frac{1}{x-1}(\varphi_x(t) - 1).$$

- Effectuer le changement de variable

$$\varphi = \frac{x-t}{1-t} \quad \text{dans} \quad \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{r+n+1}} dt.$$

3. Majorations.

- Par comparaison à une intégrale, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \ln(n).$$

b. Montrer que

$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x.$$

c. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \binom{r+n}{n} \leq (ne)^r.$$

d. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^x \varphi^n(1-\varphi)^{r-1} d\varphi \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

4. Montrer que $\forall x \in [0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$(1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^n \binom{r+k-1}{k} x^k + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{-r}{k} (-x)^k + R_n(x)$$

avec $0 \leq R_n(x) \leq r \left(\frac{ne}{1-x}\right)^r \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

5. Convergences.

- Montrer que $R_n \in \mathcal{C}^{+\infty}([0, 1])$ et que

$$\forall x \in [0, 1[, \quad R'_n(x) = \frac{r}{1-x} R_n(x) + r \binom{n+r}{n} \frac{x^n}{1-x}.$$

- Pour tout $x \in [0, 1[$, montrer que

$$(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*} \rightarrow 0, \quad (R'_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*} \rightarrow 0, \quad (R''_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*} \rightarrow 0.$$

- Dans le cas particulier $r = 1$, quelle est l'expression de $R_n(x)$ et que dire du résultat de la question 4. ?

Dans cette partie, on a considéré que r était fixé et on a choisi de ne pas indiquer dans les notations f et R_n que les fonctions ainsi nommées dépendaient du paramètre r . Dans la suite du problème, on considère plusieurs r et on note ces fonctions f_r et $R_{r,n}$.

II. Loi géométrique

Soit $n \geq 2$ entier naturel. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique tronquée de paramètres n et p si et seulement si

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket; \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} q^n & \text{si } k = 0 \\ q^{k-1}p & \text{si } k \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{cases}.$$

1. Montrer que :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad pxf_1(qx) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k)x^k + pxR_{1,n-1}(qx).$$

2. a. Exprimer u_n en fonction de p , q et de la fonction $R_{1,n-1}$ pour que

$$E(X) = \frac{1}{p} + u_n.$$

b. Exprimer v_n en fonction de p , q et de la fonction $R_{1,n-1}$ pour que

$$E(X(X-1)) = \frac{2q}{p^2} + v_n.$$

c. Exprimer w_n en fonction de u_n et v_n pour que

$$V(X) = \frac{q}{p^2} + w_n.$$

3. On considère une suite $(X_n)_{n \geq 2}$ de variables aléatoires. Chaque X_n suit une loi géométrique tronquée de paramètres n et p . Montrer que

$$(E(X_n))_{n \geq 2} \rightarrow \frac{1}{p}, \quad (V(X_n))_{n \geq 2} \rightarrow \frac{q}{p^2}.$$

III. Temps d'attente

On considère une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p (probabilité d'un « succès »).

Soit r et n dans \mathbb{N}^* . On effectue $r+n$ épreuves de Bernoulli. On note $S_{r,n}$ la variable aléatoire égale au temps d'attente du r -ième succès en convenant d'affecter la valeur 0 si

on a obtenu strictement moins de r succès.

Par exemple, pour le temps d'attente du premier succès avec $n = 4$:

$$S_{1,4}(\{(E, E, S, S, E)\}) = 3, \quad S_{1,4}(\{(E, E, E, E, E)\}) = 0.$$

Pour le troisième succès ($r = 3$) avec $n = 7$:

$$S_{3,7}(\{(S, E, S, E, S, S, E)\}) = 5, \quad S_{3,7}(\{(S, E, E, E, S, E, E, E, E)\}) = 0.$$

Sauf pour la première question, on supposera $r \geq 2$.

1. Temps d'attente du premier succès. Montrer que $S_{1,n}$ suit une loi géométrique tronquée de paramètres $n+1$ et p .

2. Loi de $S_{r,n}$.

a. Quel est l'ensemble $S_{r,n}(\Omega)$?

b. Pour $k \in \llbracket r, r+n \rrbracket$, calculer $\mathbb{P}(S_{r,n} = k)$ en considérant la variable aléatoire égale au nombre de succès lors des $k-1$ premières épreuves.

3. Fonction génératrice de $S_{r,n}$.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1[$,

$$f_r(x) = \sum_{k=r}^{r+n} \binom{k-1}{r-1} x^{k-r} + R_{r,n}(x).$$

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1[$,

$$\frac{p^r x^r}{(1-qx)^r} = \sum_{k=r}^{r+n} \mathbb{P}(S_{r,n} = k) x^k + p^r x^r R_{r,n}(qx).$$

En déduire $\mathbb{P}(S_{r,n} = 0) = p^r R_{r,n}(q)$.

4. Espérance. Calculer la limite de $(E(S_{r,n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

5. On effectue $n+r$ épreuves et, pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on considère le temps d'attente $S_{i,n+r-i}$ du i -ième succès. Pour $i \in \llbracket 2, r \rrbracket$, on définit la variable Y_i par :

$$Y_i(\{\omega\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_{r,n}(\{\omega\}) = 0 \\ S_{i,n+r-i}(\{\omega\}) - S_{i-1,n+r-i+1}(\{\omega\}) & \text{si } S_{i,n+r-i}(\{\omega\}) > 0 \end{cases}$$

et on convient que $Y_1 = S_{1,r+n-1}$.

a. Quelle est la variable $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r$?

b. Montrer que

$$\forall k \in \llbracket r, n+r \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Y_i = k) = \mathbb{P}(S_{i,n+r-i} > 0) q^{k-1} p.$$

En déduire une autre démonstration du résultat de 4.

IV. Transitions

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé. On considère un système qui peut être dans $m + 1$ états. Une *transition* de paramètre

$$T = (t_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, m+1 \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$$

est un changement aléatoire d'état dont les caractéristiques sont données par :

$\forall (i, j) \in \llbracket 1, m + 1 \rrbracket^2$, t_{ij} = probabilité conditionnelle que le système soit passé dans l'état j sachant qu'il était dans l'état i .

L'état $m + 1$ est dit « absorbant » c'est à dire que si le système est dans cet état avant une transition, il y est encore après. Ceci se traduit par

$$t_{m+1 m+1} = 1.$$

Les états 1 à m sont dits *transitoires*.

On considère une succession de transitions indépendantes de paramètre T . Pour $i \in \llbracket 1, m + 1 \rrbracket$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n^i l'événement

E_n^i = « le système est dans l'état i après la n -ème transition » .

On note aussi $A_n = E_n^{m+1}$ (absorbant) et $T_n = \bar{A}_n = E_n^1 \cup \dots \cup E_n^m$ (transitoire).

1. Montrer que la matrice T est stochastique c'est à dire que tous ses termes sont positifs ou nuls et que pour chaque ligne, la somme des termes est 1.
2. Propriétés de T .

a. Montrer que la matrice T s'écrit à l'aide de blocs sous la forme :

$$T = \begin{pmatrix} Q & C \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), C \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}).$$

Montrer que

$$C = (I_m - Q)U \text{ avec } U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}).$$

b. En utilisant sans démonstration le produit matriciel par blocs, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T^n = \begin{pmatrix} Q^n & (I - Q^n)U \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On écrit dans des matrices lignes les probabilités pour le système d'être dans un état particulier.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, L_n = (\mathbb{P}(E_n^1) \quad \dots \quad \mathbb{P}(E_n^m) \quad \mathbb{P}(A_n)) \in \mathcal{M}_{1 m+1}(\mathbb{R}).$$

On suppose que le système n'est pas dans l'état absorbant avant la première transition ce qui se traduit par

$$L_0 = (\mathbb{P}(E_0^1) \quad \dots \quad \mathbb{P}(E_0^m) \quad 0) \in \mathcal{M}_{1 m+1}(\mathbb{R}).$$

- a. Montrer que $L_n = L_0 T^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- b. Exprimer $\mathbb{P}(A_n)$ avec un produit matriciel.
4. On note X la variable aléatoire égale au temps d'attente du passage à l'état absorbant.
 - a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quel est l'événement $(X > n)$?
 - b. Déterminer avec des produits matriciels la loi de X c'est à dire les $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
5. Exemple. Dans cette question

$$Q = \begin{pmatrix} q & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & q & p \\ 0 & \dots & \dots & 0 & q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}).$$

- a. Calculer Q^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.
- b. Modéliser un système permettant de retrouver la loi du r -ième succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes

Corrigé

I. Généralisation de sommes usuelles

1. La fonction f est définie dans $]-\infty, 1[$ par $f(x) = (1-x)^r$ pour $r > 0$ fixé.

a. Dérivées de f

$$f'(x) = r(1-x)^{-(r+1)}, f''(x) = r(r+1)(1-x)^{-(r+2)}, \dots,$$

$$f^{(k)}(x) = \underbrace{r(r+1)\dots}_{k \text{ facteurs}} (1-x)^{r+k}.$$

Le dernier des k facteurs est $(r+k-1)$.

b. Pour obtenir un coefficient du binôme, on écrit les facteurs dans l'autre sens

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\overbrace{(r+k-1)(r+k-2)\dots}^{k \text{ facteurs}}}{k!} = \binom{r+k-1}{k}.$$

2. a. Pour tout $u \in [0, x]$,

$$\varphi_x(t) = \frac{x-t}{1-t} = u \Leftrightarrow (1-u)t = x-u \Leftrightarrow t = \frac{x-u}{1-u}$$

On en déduit que φ_x est injective. D'après un théorème de cours, elle est monotone car elle est continue. Elle est décroissante car $\varphi_x(0) = x$ et $\varphi_x(x) = 0$. Elle est donc bijective de $[0, x]$ dans lui-même. Elle involutive c'est à dire égale à sa bijection réciproque.

Par une décomposition idiote :

$$\varphi_x(t) = \frac{(x-1) + (1-t)}{1-t} = \frac{x-1}{1-t} + 1 \Rightarrow \frac{1}{1-t} = \frac{1}{x-1} (\varphi_x(t) - 1).$$

b. On effectue le changement de variable

$$\varphi = \frac{x-t}{1-t} \text{ dans } \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{r+n+1}} dt.$$

Les bornes sont inversées. Un φ^n apparait clairement sous l'intégrale. Pour l'élément différentiel, on dérive la relation de la question b.

$$\frac{dt}{(1-t)^2} = \frac{d\varphi}{x-1} \Rightarrow dt = \frac{(1-t)^2}{x-1} d\varphi = \left(\frac{x-1}{\varphi-1}\right)^2 \frac{1}{x-1} d\varphi = \frac{x-1}{(\varphi-1)^2} d\varphi$$

en utilisant $1-t = \frac{x-1}{\varphi-1}$ qui vient aussi de b. On en déduit

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{r+n+1}} dt = \int_x^0 \varphi^n \frac{(\varphi-1)^{r+1}}{(x-1)^{r+1}} \frac{x-1}{(\varphi-1)^2} d\varphi = \frac{1}{(1-x)^r} \int_0^x \varphi^n (1-\varphi)^{r-1} d\varphi.$$

3. Majorations.

a. Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante dans $]0, +\infty[$:

$$\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{dt}{t}, \frac{1}{3} \leq \int_2^3 \frac{dt}{t}, \dots, \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t}, \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n).$$

b. En étudiant $x \mapsto \ln(1+x) - x$ dans $] -1, +\infty[$, on montre que $\ln(1+x) \leq x$ pour tous les $x > 0$.

c. On exprime le coefficient du binôme comme un produit de n fractions, on passe en exponentielle et on utilise les majorations précédentes

$$\binom{r+n}{n} = \frac{r+1}{1} \frac{r+2}{2} \dots \frac{r+n}{n} = e^{\ln(1+r) + \ln(1+\frac{r}{2}) + \dots + \ln(1+\frac{r}{n})}$$

$$\leq e^{r+r(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})} \leq e^{r+r \ln(n)} = (ne)^r.$$

Cette méthode de majoration est très maladroite. En utilisant

$$\binom{r+n}{n} = \binom{r+n}{r},$$

on obtient un produit de r fractions équivalent à $\frac{n^r}{r!}$ qui est une bien meilleure estimation.

d. De $0 \leq \varphi \leq x < 1$, on tire $0 < 1-\varphi \leq 1$. On en déduit

$$0 \leq \int_0^x \varphi^n (1-\varphi)^{r-1} d\varphi \leq \int_0^x \varphi^n d\varphi = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

4. Appliquons à f la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x)$$

avec $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$

En remplaçant avec le résultat de 1.b., on trouve le bon début de développement

$$(1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^n \binom{r+k-1}{k} x^k + R_n(x)$$

$$\text{avec } R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \frac{r(r+1)\cdots(r+n)}{(1-t)^{r+n+1}} dt$$

$$= r \binom{r+n}{n} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{r+n+1}} dt.$$

Avec le changement de variable de 2.b.

$$R_n(x) = \frac{r \binom{r+n}{n}}{(1-x)^r} \int_0^x \varphi^n (1-\varphi)^{r-1} d\varphi$$

que l'on encadre avec 3.d. puis 3.c

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{r \binom{r+n}{n}}{(1-x)^r} \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq r \left(\frac{ne}{1-x} \right)^r \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

La deuxième forme de la somme permet de la voir comme une généralisation de la formule du binôme. Elle repose seulement sur la convention généralisant les coefficients du binôme

$$\binom{r+k-1}{k} = \frac{(r-1+k)(r-1+k-1)\cdots(r-1+1)}{k!}$$

$$= \frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-(k-1))}{k!} (-1)^k = \binom{-r}{k} (-1)^k.$$

5. Convergences.

a. La fonction R_n est évidemment \mathcal{C}^∞ car combinaison de f et d'un polynôme. On peut dériver facilement l'expression de $R_n(x)$ de la question précédente (intégrale en φ) car le x ne figure pas dans la fonction à intégrer :

$$R'_n(x) = \frac{r}{1-x} R_n(x) + \frac{r \binom{r+n}{n}}{(1-x)^r} x^n (1-x)^{r-1} = \frac{r}{1-x} R_n(x) + r \binom{r+n}{n} \frac{x^n}{1-x}.$$

b. Le point important est que $\left(\frac{r x^n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\binom{r+n}{n} x^n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tendent vers 0 à cause de la majoration de 3.c. et des comparaisons des suites usuelles car $0 < x < 1$. On

en déduit $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*} \rightarrow 0$ d'après l'encadrement de 4. et $(R'_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*} \rightarrow 0$ avec 5.a. On obtient $(R''_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*} \rightarrow 0$ en dérivant 5.a. ce qui conduit à une expression du même genre.

c. Si $r = 1$,

$$\binom{r+k-1}{k} = 1 \text{ et } R_n(x) = \frac{\binom{n+1}{n}}{1-x} \int_0^x \varphi^n d\varphi = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Le développement de la question 4. est simplement le développement géométrique usuel :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

II. Loi géométrique

1. On a vu à la fin du I. que pour f_1 , le développement est la formule usuelle

$$px f_1(qx) = \frac{px}{1-qx} = px (1 + (qx) + (qx)^2 + \cdots + (qx)^{n-1} + R_{1,n-1}(qx))$$

$$= q^0 px + qp x^2 + \cdots + q^{k-1} p x^k + \cdots + q^{n-1} p x^n + px R_{1,n-1}(qx)$$

$$= \mathbb{P}(X=1)x + \mathbb{P}(X=2)x^2 + \cdots + \mathbb{P}(X=k)x^k + \cdots + \mathbb{P}(X=n)x^n + px R_{1,n-1}(qx).$$

2. a. Dérivons la relation précédente :

$$\frac{p}{1-qx} + \frac{pqx}{(1-qx)^2} = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X=k) x^{k-1} + p R_{1,n-1}(qx) + pqx R'_{1,n-1}(qx).$$

Prenons la valeur en 1 pour faire apparaître l'espérance :

$$\frac{p}{1-q} + \frac{pq}{(1-q)^2} = E(X) + p R_{1,n-1}(q) + pq R'_{1,n-1}(q)$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{1}{p} + u_n \text{ avec } u_n = -p R_{1,n-1}(q) - pq R'_{1,n-1}(q)$$

$$\text{et } \frac{p}{1-q} + \frac{pq}{(1-q)^2} = 1 + \frac{q}{p} = \frac{1}{p} \text{ car } 1-q=p.$$

b. On dérive une autre fois et on prend la valeur en 1 :

$$\begin{aligned} \frac{2pq}{(1-q)^2} + \frac{2pq^2}{(1-q)^3} &= E(X(X-1)) + 2pqR'_{1,n-1}(1) + pq^2R''_{1,n-1}(q) \\ \text{avec } \frac{2pq}{(1-q)^2} + \frac{2pq^2}{(1-q)^3} &= \frac{2q}{p} + \frac{2q^2}{p^2} = \frac{2q}{p^2}(p+q) = \frac{2q}{p^2} \\ \Rightarrow E(X(X-1)) &= \frac{2q}{p^2} + v_n \text{ avec } v_n = -2pqR'_{1,n-1}(1) - pq^2R''_{1,n-1}(q). \end{aligned}$$

c. Variance

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + w_n = \frac{q + (q+p) - 1}{p^2} + w_n = \frac{q}{p^2} + w_n. \end{aligned}$$

L'expression de w_n est

$$w_n = v_n + u_n - u_n^2 - 2u_n = v_n - u_n - u_n^2.$$

3. D'après les majorations du I, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tendent vers 0 donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ aussi ce qui assure la convergence de la suite des espances et des variances.

III. Temps d'attente

1. Loi du temps d'attente du premier succès. Par définition, $S_{1,n}(\Omega) = \llbracket 0, 1+n \rrbracket$. $S_{1,n} = 0$ est l'événement « les $n+1$ expériences ont été des échecs » donc $\mathbb{P}(S_{1,n} = 0) = q^{n+1}$.

Pour $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} (S_{1,n} = k) &= \text{« les } k-1 \text{ premières expériences sont des échecs »} \\ &\quad \cap \text{« la } k\text{-ième est une réussite »} \\ \Rightarrow \mathbb{P}(S_{1,n} = k) &= q^{k-1}p \end{aligned}$$

car la k -ième expérience est indépendante des précédentes.

2. Temps d'attente du r -ième succès.

a. Par définition de la variable aléatoire, $S_{r,n}(\Omega) = \{0\} \cup \llbracket r, r+n \rrbracket$.

b. Soit $k \in \llbracket r, n \rrbracket$. Notons X la variable aléatoire égale au nombre de succès lors des $k-1$ premières épreuves. D'après le cours, X suit une loi binomiale de paramètres $k-1$ et p . De plus

$$\begin{aligned} (S_{r,n} = k) &= (X = r-1) \cap \text{« la } k\text{-ième épreuve est un succès »} \\ \Rightarrow \mathbb{P}(S_{r,n} = k) &= \mathbb{P}(X = r-1) \mathbb{P}(\text{« la } k\text{-ième épreuve est un succès »}) \\ &= \binom{k-1}{r-1} p^{r-1} q^{k-r} p = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}. \end{aligned}$$

car les épreuves sont indépendantes.

3. Fonction génératrice de $S_{r,n}$.

a. Reprenons le développement de I.4. et changeons de nom d'indice $k' = k+r$ dans la somme

$$\begin{aligned} f_r(x) &= \frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{k=0}^n \binom{r+k-1}{k} x^k + R_{r,n}(x) \\ &= \sum_{k'=r}^{n+r} \binom{k'-1}{k'-r} x^{k'-r} + R_{r,n}(x) = \sum_{k=r}^{n+r} \binom{k-1}{k-r} x^{k-r} + R_{r,n}(x) \\ &= \sum_{k=r}^{n+r} \binom{k-1}{r-1} x^{k-r} + R_{r,n}(x) \end{aligned}$$

par symétrie du coefficient du binôme.

b. La formule précédente est valable pour tous les $x \in [0, 1[$. Comme $0 < q < p$, on peut remplacer x par qx avec $x \in [0, 1[$:

$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{k=r}^{n+r} \binom{k-1}{r-1} (qx)^{k-r} + R_{r,n}(qx).$$

Multiplions par $p^r x^r$ pour faire apparaître le $\mathbb{P}(S_{r,n} = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$ et disparaître le x^k au dénominateur

$$\frac{p^r x^r}{(1-x)^r} = \sum_{k=r}^{n+r} \underbrace{\binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r} x^k}_{=\mathbb{P}(S_{r,n}=k)} + p^r x^r R_{r,n}(qx).$$

En prenant la valeur en 1, comme $1 - q = p$, on obtient :

$$1 = \sum_{k=r}^{n+r} \mathbb{P}(S_{r,n} = k) + p^r R_{r,n}(qx)$$

$$\text{avec } \sum_{k=r}^{n+r} \mathbb{P}(S_{r,n} = k) = \mathbb{P}(S_{r,n} > 0) = 1 - \mathbb{P}(S_{r,n} = 0) \\ \Rightarrow \mathbb{P}(S_{r,n} = 0) = p^r R_{r,n}(qx).$$

4. En dérivant l'égalité du a. et en prenant la valeur en 1, on obtient

$$\frac{rp^r}{(1-q)^r} + \frac{rp^r q}{(1-q)^{r+1}} = E(S_{r,n}) + u_n$$

où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 d'après I.5.b. On en déduit (avec $p + q = 1$),

$$(E(S_{r,n}))_{n \in \mathbb{N}^*} \rightarrow \frac{rp^r}{(1-q)^r} + \frac{rp^r q}{(1-q)^{r+1}} = r + \frac{rq}{p} = r \frac{p+q}{p} = \frac{r}{p}.$$

5. Dans cette question, on effectue $n + r$ tirages. Une issue élémentaire est une suite de $n + r$ succès (S) ou échec (E). Pour une telle issue ω , notons s le nombre de succès.

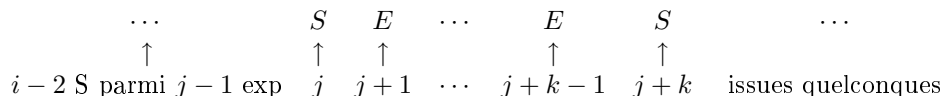
a. Par définition, $Y_i(\{\omega\}) = 0$ si $S_{r,n}(\{\omega\}) = 0$ c'est à dire si $s < r$. Pour les autres issues élémentaires, la somme est télescopique et on obtient

$$Y_1 + \dots + Y_r = S_{r,n}.$$

b. Soit $k \in \llbracket r, n+r \rrbracket$. Par définition, $(Y_i = k) \subset (S_{r,n} > 0) \subset (S_{i-1, n+r-i+1} > 0)$. On peut donc décomposer selon les valeurs possibles de $S_{i-1, n+r-i+1}$ c'est à dire $\llbracket i-1, n+r \rrbracket$.

$$(Y_i = k) = \bigcup_{j \in \llbracket i-1, n+r \rrbracket} (Y_i = k) \cap (S_{i-1, n+r-i+1} = j) \\ \Rightarrow \mathbb{P}(Y_i = k) = \sum_{j \in \llbracket i-1, n+r \rrbracket} \mathbb{P}((Y_i = k) \cap (S_{i-1, n+r-i+1} = j))$$

L'événement $(S_{i-1, n+r-i+1} = j) \cap (Y_i = k)$ est constitué des tirages de la forme suivante :



Comme les expériences sont indépendantes,

$$\mathbb{P}((S_{i-1, n+r-i+1} = j) \cap (Y_i = k)) = \mathbb{P}((S_{i-1, n+r-i+1} = j)) q^{k-1} p$$

On peut mettre en facteur le $q^{k-1} p$ qui est le même pour tous :

$$\mathbb{P}(Y_i = k) = \left(\sum_{j \in \llbracket i-1, n+r \rrbracket} \mathbb{P}(S_{i-1, n+r-i+1} = j) \right) q^{k-1} p \\ = \mathbb{P}(S_{i-1, n+r-i+1} > 0) q^{k-1} p.$$

D'après 3.b. et les majorations du I,

$$\mathbb{P}(S_{i-1, n+r-i+1} > 0) = 1 - \varepsilon_{i,n} \text{ avec } (\varepsilon_{i,n})_{n \in \mathbb{N}^*} \rightarrow 0 \\ \Rightarrow (E(Y_i))_{n \in \mathbb{N}^*} = ((1 - \varepsilon_{i,n}) E(S_{1, n+r-1}))_{n \in \mathbb{N}^*} \rightarrow \frac{1}{q}.$$

Par linéarité de l'espérance et de la limite

$$(E(S_{r,n}))_{n \in \mathbb{N}^*} = (E(Y_1))_{n \in \mathbb{N}^*} + \dots + (E(Y_r))_{n \in \mathbb{N}^*} = \frac{r}{p}.$$

IV. Transitions

1. Les coefficients de T sont positifs ou nuls car ce sont des probabilités conditionnelles. Les événements $E_n^1, E_n^2, \dots, E_n^m, A_n$ forment un système complet. D'après la formule des probabilités totales, en notant \mathbb{P}_i la probabilité conditionnelle sachant que le système était dans l'état i avant une transition (disons la n -ième),

$$\mathbb{P}_i(\Omega) = 1 = \sum_{j=1}^{m+1} p_i(E_n^j) = \sum_{j=1}^{m+1} t_{ij}.$$

2. a. Les 0 sur la ligne $m+1$ en bas à gauche de T marquent simplement le caractère absorbant de l'état $m+1$. Une fois dans cet état, la probabilité de changer d'état est nulle. La propriété sur la somme des lignes se traduit par

$$\begin{pmatrix} Q & C \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow QU + C = U \Rightarrow C = (I_m - Q)U.$$

en effectuant le produit par blocs et en considérant seulement les m premières lignes.

- b. La formule est valable pour $n = 1$, continuons par récurrence en montrons que l'ordre $n - 1$ entraîne l'ordre n :

$$\begin{aligned} T^n &= T^{n-1}T = \begin{pmatrix} Q^{n-1} & (I - Q^{n-1})U \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & C \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q^n & Q^{n-1}C + (I - Q^{n-1})U \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En utilisant l'expression de C

$$\begin{aligned} Q^{n-1}C + (I - Q^{n-1})U &= Q^{n-1}(I_m - Q)U + (I_m - Q^{n-1})U \\ &= (Q^{n-1} - Q^n + I_m - Q^{n-1})U = (I_m - Q^n)U. \end{aligned}$$

3. Transitions et produit matriciel.

- a. La formule $L_n = L_0T^n$ se démontre par récurrence avec la formule des probabilités totales. Elle est vraie pour $n = 0$, montrons que l'ordre $n - 1$ entraîne l'ordre n . Considérons le terme d'indice j de L_n :

$$\begin{aligned} \text{terme } 1, j \text{ de } L_n &= \mathbb{P}(E_n^j) = \sum_{i=1}^{m+1} \mathbb{P}(E_{n-1}^i) \mathbb{P}_{E_{n-1}^i}(E_n^j) \\ &= \sum_{i=1}^{m+1} (\text{terme } 1, i \text{ de } L_{n-1}) t_{ij} = \text{terme } 1, j \text{ de } L_{n-1}T \\ &= \text{terme } 1, j \text{ de } L_0T^{n-1}T = \text{terme } 1, j \text{ de } L_0T^n \end{aligned}$$

- b. Par définition de L_n :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= \text{terme } 1, m+1 \text{ de } L_n = \text{terme } 1, m+1 \text{ de } L_0T^n \\ &= \text{terme } 1, m+1 \text{ de } \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_0^1) & \cdots & \mathbb{P}(E_0^m) & 0 \\ 0 \cdots 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^n & (I - Q^n)U \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (\mathbb{P}(E_0^1) \cdots \mathbb{P}(E_0^m)) (I - Q^n)U. \end{aligned}$$

4. Ici X est le temps d'attente de l'état absorbant.

- a. Par définition $(X > n) = \overline{A_n}$ c'est à dire le complémentaire de l'événement « être

dans l'état absorbant après n transitions ». D'après la relation de 3.b.,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= (\mathbb{P}(E_0^1) \cdots \mathbb{P}(E_0^m)) U - (\mathbb{P}(E_0^1) \cdots \mathbb{P}(E_0^m)) Q^n U \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m \mathbb{P}(E_0^i) \right)}_{=1} - (\mathbb{P}(E_0^1) \cdots \mathbb{P}(E_0^m)) Q^n U \end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathbb{P}(\overline{A_n}) = (\mathbb{P}(E_0^1) \cdots \mathbb{P}(E_0^m)) Q^n U.$$

- b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $X = k$ se produit lorsque le système n'est pas dans l'état absorbant après $k - 1$ transitions mais qu'il l'est après la k -ième :

$$\begin{aligned} (X = k) &= \overline{A_{k-1}} \cap A_k = \bigcup_{i=1}^m E_{k-1}^i \cap A_k \\ \Rightarrow \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(E_{k-1}^i) \mathbb{P}_{E_{k-1}^i}(A_k) = \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(E_{k-1}^i) t_{im+1} \\ &= (\mathbb{P}(E_{k-1}^1) \cdots \mathbb{P}(E_{k-1}^m)) C \end{aligned}$$

La relation $L_n = L_0T^n$ entraîne

$$(\mathbb{P}(E_{k-1}^1) \cdots \mathbb{P}(E_{k-1}^m)) = (\mathbb{P}(E_0^1) \cdots \mathbb{P}(E_0^m)) Q^{k-1}$$

On en déduit

$$\mathbb{P}(X = k) = (\mathbb{P}(E_0^1) \cdots \mathbb{P}(E_0^m)) Q^{k-1} C.$$

On pouvait aussi raisonner en utilisant la décomposition en événements disjoints

$$(X > k - 1) = (X = k) \cup (X > k) \Rightarrow \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k)$$

puis le résultat de 3.b.

5. a. La matrice se décompose $Q = qI_m + pN$ où N est nulle sauf pour la bande de 1 juste au dessus de la diagonale. Pour les puissances de N , la bande de 1 se décale vers le haut à droite avec $N^m = 0$. On en déduit

$$Q^k = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{k}{i} p^{k-i} q^i N^i.$$

- b. Le système comprend un dispositif permettant de « compter » les succès jusqu'à r . Le compteur ne peut que s'incrémenter et se bloque à r . Pour un tel système $m = r$ et l'état 1 correspond à 0 succès, l'état 2 à 1 succès, \dots , l'état m à r succès, l'état absorbant à r succès. la matrice de transition est

$$T = \begin{pmatrix} Q & C \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } C = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R}).$$

Le temps d'attente du r -ième succès est le temps d'attente du passage à l'état absorbant pour le système en commençant obligatoirement dans l'état 1 (0 succès) avant les transitions. D'après 4.b.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= (1 \quad 0 \quad \dots \quad 0) Q^{k-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p \end{pmatrix} = p (1 \quad 0 \quad \dots \quad 0) C_r(Q^{k-1}) \\ &= p \times \text{terme } 1, r \text{ de } Q^{k-1} = p \times \binom{k-1}{r-1} p^{r-1} q^{k-1-r+1} = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}. \end{aligned}$$

car dans l'expression de Q^{k-1} comme somme, le seul i qui contribue à la dernière colonne est $r-1$.