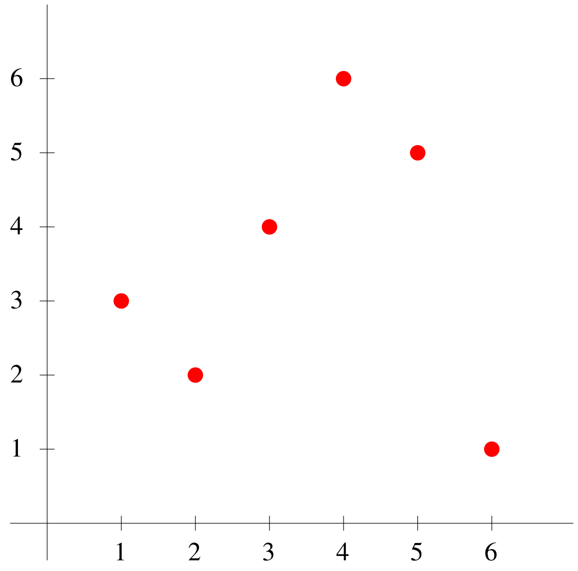

Fig. 1: Exemple

Problème

1. La figure 1 aide à extraire les fonctions croissantes ou décroissantes.
   a. On trouve 12 parties A contenant au moins deux éléments et telles que f_A soit croissante.
   $$\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{2,3,4\},\{2,3\}\{2,4\},\{3,4\},\{2,3,5\},\{2,5\},\{3,5\}$$
   b. On trouve 9 parties A contenant au moins deux éléments et telles que f_A soit décroissante.
   $$\{1,2,6\},\{1,2\},\{1,6\},\{2,6\},\{3,6\},\{4,5,6\},\{4,6\},\{5,6\},\{4,5\}$$
   En cherchant ces parties, on réalise bien que certaines sont *maximales*. Les questions suivantes précisent ce point.
2. a. La convention de l'énoncé relative aux restrictions à des singletons rend les questions 2.a et 3.a évidentes. Pour chaque p, le singleton $\{p\}$ convient. Ces questions servent seulement à justifier que les parties de $\mathbb{N}$ dont on veut prendre les plus grands éléments sont non vides. Comme ces parties sont majorées par m, on est assuré de l'existence de ces plus grands éléments. Il s'agit de trouver la taille maximale des séquences croissantes ou décroissantes qui se terminent en p.
   On présente directement le tableau des résultats en 3.c.
   b. Voir 3.c
3. a. Voir 3.c
   b. Voir 3.c
   c. Tableau des résultats comprenant les questions 2.b et 2.c.

p	1	2	3	4	5	6
i_p	1	1	2	3	3	1
j_p	1	2	1	1	2	3
(i_p,j_p)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(1,3)$

4. a. Soit $p<q$ et A une partie de cardinal i_p vérifiant les conditions de 2.a pour p. Lorsque $f(p)<f(q)$, on peut adjoindre q à A. Alors la restriction de f à $A\cup\{q\}$ est toujours croissante et $A\cup\{q\}$ vérifie les conditions de 2.a relatives à q. On en déduit :
   $$i_q \geq i_p + 1$$
   b. Le raisonnement est analogue à celui de la question précédente.
5. Notons φ l'application définie dans E par $\varphi(p)=(i_p,j_p)$.
   Supposons $\varphi(p)=\varphi(q)$ avec $p<q$.
   Comme $i_p=i_q$, l'inégalité $i_p<i_q$ est fausse. Donc, d'après 4.a., l'inégalité $f(p)<f(q)$ l'est aussi. On en déduit
   $$f(q)\leq f(p)$$
   De même, comme $j_p<j_q$ est fausse, $f(q)<f(p)$ l'est aussi donc $f(p)\leq f(q)$.
   On en déduit donc $f(p)=f(q)$ puis $p=q$ à cause de l'injectivité de f.
6. *Théorème de Erdös-Szekeres.* Conservons la notation φ de la question précédente. Comme φ est injective, elle prend m valeurs distinctes. Il est donc impossible que ces valeurs (qui sont des couples) soient *toutes* dans le produit cartésien
   $$\{1,2,\cdots,a\}\times\{1,2,\cdots,b\}$$

Rémy Nicolai M1603C

qui en contient seulement ab avec $ab < ab + 1 = m$.
On en déduit qu'il existe un p tel que $i_p > a$ ou tel que $j_q > b$. Dans le premier cas, il existe une partie A contenant strictement plus de a éléments telle que f_A soit croissante. Dans le second cas, il existe une partie B contenant strictement plus de b éléments telle que f_B soit décroissante.

7. a. Commençons par mettre en évidence une partie D telle que f_D soit décroissante. Fixons un m entre 0 et $b-1$ et considérons

$$D = \{ma, ma+1, \cdots, ma+(a-1)\}$$

Elle contient a éléments qui ont tous le même quotient m dans la division par a et des restes croissant de 0 à $a-1$. La restriction à D ne dépend que du reste et elle est décroissante.
Nous allons maintenant démontrer

$$x < x' \text{ et } f(x) > f(x') \Rightarrow q(x) = q(x')$$

En effet, d'une part

$$x < x' \Rightarrow q(x) \leq q(x') \Rightarrow q(x') - q(x) \geq 0$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} f(x) > f(x') \Rightarrow r(x') - r(x) > (q(x') - q(x))a \Rightarrow (q(x') - q(x))a < a \\ \Rightarrow q(x') - q(x) < 1 \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{Z}$, les deux inégalités ne peuvent se produire que si $q(x) = q(x')$.
On en déduit que lorsque f_A est décroissante, la partie A est incluse dans une partie de la forme D. Elle contient donc au plus a éléments.

b. Considérons maintenant une partie

$$C = \{k, a+k, 2a+k, \cdots, (b-1)a+k\}$$

pour un k fixé entre 0 et $a-1$. Elle contient b éléments tous de même reste mais de quotients croissant de 0 à $b-1$. La restriction de f à C ne dépend que du quotient, elle est donc strictement croissante.
Montrons maintenant

$$x < x' \text{ et } f(x) < f(x') \Rightarrow q(x) < q(x')$$

En exprimant $r(x)$ en fonction de x et $q(x)$ on obtient

$$f(x) = 2q(x)a + a - x$$

On en déduit

$$f(x') - f(x) = 2(q(x') - q(x)) - (x' - x)$$

En particulier

$$f(x') - f(x) > 0 \Rightarrow 2(q(x') - q(x)) > x' - x$$

Finalement :

$$\left.\begin{aligned} x &< x' \\ f(x) &< f(x') \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2(q(x') - q(x)) > x' - x > 0 \Rightarrow q(x) < q(x')$$

Si A est une partie telle que f_A soit croissante, on ne peut pas déduire que A est de la forme de C. On sait que les quotients doivent croître mais on n'a pas prouvé que les restes sont les mêmes. Une telle partie doit donc être de la forme

$$\{k_0, a+k_1, 2a+k_2, \cdots, (b-1)a+k_{b-1}\}$$

où les k_i sont entre 0 et $a-1$. Elle contient au plus b éléments.

c. Les questions précédentes montrent qu'il existe un exemple de fonction f définie dans un ensemble contenant ab éléments avec lequel, pour toute partie A :

$$\begin{aligned} f_A \text{ croissante } &\Rightarrow \sharp A \leq b \\ f_A \text{ décroissante } &\Rightarrow \sharp A \leq a \end{aligned}$$

On ne peut donc pas étendre le théorème au cas où $m = ab$.