Problème

Dans toute ce problème, m désigne un nombre entier, E une partie de $\mathbb{N}$ à m éléments et f une fonction injective définie dans E et à valeurs réelles.

Si A est une partie de E, on désigne par f_A la restriction de f à A c'est à dire la fonction définie de A vers $\mathbb{R}$ et telle que

$$\forall a \in A, f_A(a) = f(a)$$

Cet exercice porte sur les restrictions *monotones* de f. Par convention, on décide qu'une fonction dont le domaine de définition se réduit à un point est à la fois croissante et décroissante.

1. Exemple. Soit $m = 6$ et f définie par $E = \{1, \cdots, m\}$

$$f(1) = 3, f(2) = 2, f(3) = 4, f(4) = 6, f(5) = 5, f(6) = 1$$

   a. Trouver toutes les parties A de E contenant au moins deux éléments et telles que f_A soit croissante.
   b. Trouver toutes les parties A de E contenant au moins deux éléments et telles que f_A soit décroissante.
2. a. Montrer que pour tout p dans E, il existe au moins une partie A de E telle que
   – $A \subset \{1, \cdots, p\}$
   – $p \in A$
   – f_A croissante
   On désigne par i_p le plus grand élément de l'ensemble des cardinaux des parties vérifiant ces conditions.
   b. Calculer les i_p pour l'exemple de la question 1.
3. a. Montrer que pour tout p dans E, il existe au moins une partie A de E telle que
   – $A \subset \{1, \cdots, p\}$
   – $p \in A$
   – f_A décroissante
   On désigne par j_p le plus grand élément de l'ensemble des cardinaux des parties vérifiant ces conditions.
   b. Calculer les j_p pour l'exemple de la question 1.
   c. Présenter les résultats des questions 2.b et 3.b. sous la forme d'un tableau dont la dernière ligne est formée par les couples (i_p, j_p)
4. Soit p et q dans E tels que $p < q$
   a. Montrer que $f(p) < f(q) \Rightarrow i_p < i_q$
   b. Montrer que $f(q) < f(p) \Rightarrow j_p < j_q$
5. Montrer que l'application définie dans E qui à p associe (i_p, j_p) est injective.
6. Théorème de Erdös-Szekeres.
   Soit a et b entiers naturels non nuls et $m = ab + 1$. Montrer que, pour toute fonction injective f définie dans E (ensemble à m éléments) et à valeurs réelles, il existe une partie A de E contenant strictement plus de a éléments telle que f_A soit croissante ou bien il existe une partie B de E contenant strictement plus de b éléments telle que f_B soit décroissante.
7. Soit $a \geq 2$ et b deux entiers naturels fixés, $m = ab$ et $E = \{0, \cdots, m-1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{N}$, notons $q(x)$, $r(x)$ le quotient et le reste de la division euclidienne de x par a. On définit la fonction f dans E par

$$f(x) = (q(x) + 1)a - r(x)$$

   a. Préciser les parties A de E telles que f_A soit décroissante. Quel est le plus grand cardinal possible ?
   b. Préciser les parties B de E telles que f_B soit croissante. Quel est le plus grand cardinal possible ?
   c. Que peut-on en conclure relativement au théorème de la question 6. ?

Rémy Nicolai M1603E