Problème

1. On peut raisonner par récurrence sur n. Pour $n = 2$, il s'agit de la formule usuelle de dérivation d'un produit. Montrons que la formule à l'ordre n entraîne celle à l'ordre $n+1$:

$$\begin{aligned}(F_1 \cdots F_n F_{n+1})' &= (F_1 \cdots F_n)' F_{n+1} + (F_1 \cdots F_n) F'_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \in \{1,\cdots,n\} \setminus \{i\}} F_j \right) F'_i F_{n+1} + (F_1 \cdots F_n) F'_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\prod_{j \in \{1,\cdots,n+1\} \setminus \{i\}} F_j \right) F'_i.\end{aligned}$$

2. On utilise le théorème de Bézout dans les deux sens. Comme A et B sont premiers entre eux, il existe des polynômes U et V tels que $UA + VB = 1$. On en tire

$$1 = U\underbrace{(A+B)}_{=C} + (V-U)B = (U-V)A + V\underbrace{(A+B)}_{=C}.$$

Ceci prouve que $C \wedge B = A \wedge C = 1$. Les trois ensembles de racines sont donc deux à deux disjoints. De plus,

$$\deg(M) = n_A + n_B + n_C = m \leq \deg(ABC) = \sum_{i=1}^{n_A} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n_B} \beta_i + \sum_{i=1}^{n_C} \gamma_i.$$

3. a. Comme A et C sont premiers entre eux ils n'ont pas de racines en commun. Tous les a_i sont distincts de tous les c_j. Les a_i sont des zéros de F et les c_j des pôles. Pour calculer la dérivée de $F = \frac{A}{C}$, on utilise la question préliminaire avec des monômes F_i égaux à

$$(X - a_i)^{\alpha_i} \qquad \text{ou} \qquad (X - c_i)^{-\gamma_i}.$$

En dérivant, l'exposant diminue de 1 et un coefficient α_i ou $-\gamma_i$ apparait. La fraction ne contient donc que des pôles simples (tous les a_i et c_j). Elle est de degré -1 donc sans partie polynomiale. Sa décomposition en éléments simples est

$$\frac{F'}{F} = \sum_{i=1}^{n_A} \frac{\alpha_i}{X - a_i} - \sum_{i=1}^{n_C} \frac{\gamma_i}{X - c_i}.$$

Le calcul est identique pour $G = \frac{B}{C}$.

$$\frac{G'}{G} = \sum_{i=1}^{n_B} \frac{\beta_i}{X - b_i} - \sum_{i=1}^{n_C} \frac{\gamma_i}{X - c_i}.$$

b. Les pôles de $\frac{F'}{F}$ et $\frac{G'}{G}$ sont les racines de C et ils sont tous simples. En multipliant par M, on obtient donc chaque fois un polynôme. Ce polynôme est de degré inférieur ou égal à $m-1$ car dériver une fraction de degré non nul diminue son degré de 1, lorsque le degré est nul, le degré de la fraction dérivée est plus petit que -2.

4. En fait $F + G = 1$ par définition de F et G donc $G' = -F$.

$$AU + BV = AM\frac{F'}{F} + BM\frac{G'}{G} = MF'\left(\frac{A}{F} - \frac{B}{G}\right) = MF'(C - C) = 0.$$

5. D'après la question précédente, A divise BV dans $\mathbb{C}[X]$. Comme A est premier avec B, le théorème de Gauss prouve que A divise V donc $\deg(A) \leq \deg(V) < m$. Le raisonnement est le même pour $\deg(B) < m$. Quant à $C = A + B$, son degré est inférieur ou égal au plus grand des degrés de A et B. Il est donc aussi strictement inférieur à m.

6. Le point important ici est que les racines distinctes de P^n (ou de Q^n) sont les mêmes que celles de P (ou de Q).
Dans $\mathbb{C}[X]$, deux polynômes sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont pas de racine en commun. Donc $P \wedge Q = 1$ entraîne $P^n \wedge Q^n = 1$. On peut appliquer le théorème de Mason (question 5.) avec $A = P^n$, $B = Q^n$, $C = R^n$. On en tire que les degrés de P^n, Q^n, R^n sont strictement plus petits que m qui est le nombre total de racines distinctes de P^n, Q^n, R^n. Comme ces racines sont les mêmes que celles de P, Q, R, en tenant compte d'éventuelles multiplicités, on a

$$m \leq \deg(PQR)$$

On en tire, en sommant,

$$\left.\begin{aligned} n\deg(P) &\leq m-1 \\ n\deg(Q) &\leq m-1 \\ n\deg(R) &\leq m-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow n\deg(PQR) \leq 3m - 3 \leq 3\deg(PQR) - 3$$

De $(n-3)\deg(PQR) < 0$, on déduit $n - 3 < 0$ c'est à dire $n = 1$ ou 2.

Rémy Nicolai M1610C