

Problème

L'objet de ce problème est le théorème de Mason - Stothers et son application au grand théorème de Fermat pour les polynômes.

Soit A, B, C trois polynômes non nuls à coefficients complexes tels que $A + B = C$. On suppose A et B premiers entre eux et de degré supérieur ou égal à 1.

On introduit les notations suivantes pour désigner les racines *distinctes* de ces polynômes, leurs multiplicités et leurs coefficients dominants.

$$A = \lambda_A \prod_{i=1}^{n_A} (X - a_i)^{\alpha_i}, \quad B = \lambda_B \prod_{i=1}^{n_B} (X - b_i)^{\beta_i}, \quad C = \lambda_C \prod_{i=1}^{n_C} (X - c_i)^{\gamma_i}.$$

On note $m = n_A + n_B + n_C$, on introduit le polynôme

$$M = \left(\prod_{i=1}^{n_A} (X - a_i) \right) \left(\prod_{i=1}^{n_B} (X - b_i) \right) \left(\prod_{i=1}^{n_C} (X - c_i) \right)$$

et les *fractions rationnelles* à coefficients complexes $F = \frac{A}{C}$, $G = \frac{B}{C}$.

1. Question préliminaire. Soit n naturel non nul et F_1, F_2, \dots, F_n des fractions rationnelles à coefficients complexes. Montrer que

$$(F_1 F_2 \cdots F_n)' = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} F_j \right) F_i'.$$

2. Montrer que C est premier avec A et B . En déduire une propriété des ensembles de racines

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{n_A}\}, \quad \{b_1, b_2, \dots, b_{n_B}\}, \quad \{c_1, c_2, \dots, c_{n_C}\}.$$

Comparer m , $\deg(M)$, $\deg(ABC)$.

3.
 - a. En utilisant la question préliminaire, former les décompositions en éléments simples de $\frac{F'}{F}$ et $\frac{G'}{G}$.
 - b. Montrer que $M \frac{F'}{F}$ et $M \frac{G'}{G}$ sont deux *polynômes* à coefficients complexes de degré strictement plus petit que m . On note

$$U = M \frac{F'}{F} \in \mathbb{C}[X], \quad V = M \frac{G'}{G} \in \mathbb{C}[X].$$

4. Montrer que $AU + BV = 0$.

5. Théorème de Mason - Stothers.

Montrer que les degrés des polynômes A, B, C sont strictement plus petits que m .

6. Grand théorème de Fermat pour les polynômes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et P, Q, R des polynômes à coefficients complexes tels que

$$P \wedge Q = 1, \quad P^n + Q^n = R^n.$$

Montrer que

$$n \deg(PQR) \leq 3 \deg(PQR) - 3.$$

En déduire que n ne peut être que 1 ou 2.