PARTIE I

Notons $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$) l'événement A (resp. B, C) réussit son tir à une épreuve donnée.

1. Calcul de probabilités.

   a. D'après le cours :
$$P(U \cup V) = P(U) + P(V) - P(U \cap V)$$

   b. On cherche la probabilité de $\overline{\mathcal{A}} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$.
$$P(\overline{\mathcal{A}}\cap(\mathcal{B}\cup\mathcal{C})) = P((\overline{\mathcal{A}}\cap\mathcal{B})\cup(\overline{\mathcal{A}}\cap\mathcal{C})) = P(\overline{\mathcal{A}}\cap\mathcal{B})+P(\overline{\mathcal{A}}\cap\mathcal{C})-P(\overline{\mathcal{A}}\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{C}) \quad \text{(d'après a)}$$
$$= P(\overline{\mathcal{A}})P(\mathcal{B}) + P(\overline{\mathcal{A}})P(\mathcal{C}) - P(\overline{\mathcal{A}})P(\mathcal{B})P(\mathcal{C}) \quad \text{(par indépendance des tirs)}$$
$$= \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

   c. On cherche la probabilité de $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$. On trouve de même
$$P(\mathcal{A}\cap(\mathcal{B}\cup\mathcal{C})) = P((\mathcal{A}\cap\mathcal{B})\cup(\mathcal{A}\cap\mathcal{C})) = P(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})+P(\mathcal{A}\cap\mathcal{C})-P(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{C})$$
$$= P(\mathcal{A})P(\mathcal{B}) + P(\mathcal{A})P(\mathcal{C}) - P(\mathcal{A})P(\mathcal{B})P(\mathcal{C})$$
$$= \frac{2}{3}\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

2. Détermination de probabilités conditionnelles

   a. Tant qu'aucun des tireurs n'est éliminé, à chaque étape A vise B, B et C visent A. Le tireur C n'est pas visé et ne peut donc pas être éliminé avant A ou B. L'événement AB_n est donc impossible.

   b. $ABC_{n+1} \cap ABC_n$ est événement ABC_n et « A, B et C ratent leur tir à l'étape n ». Par indépendance des tirs on a donc
$$p(ABC_{n+1}|ABC_n) = p(\overline{\mathcal{A}})p(\overline{\mathcal{B}})p(\overline{\mathcal{C}}) = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

   c. Comme, tant qu'aucun des tireurs n'est éliminé à chaque étape A vise B, B et C visent A. L'événement $BC_{n+1} \cap ABC_n$ est événement ABC_n inter l'événement "A rate son tire et B ou C réussissent leur tir à l'étape n". Par indépendance des tirs on a donc
$$p(BC_{n+1}|ABC_n) = p(\overline{\mathcal{A}} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})) = \frac{2}{9} \qquad \text{par 1b)}$$

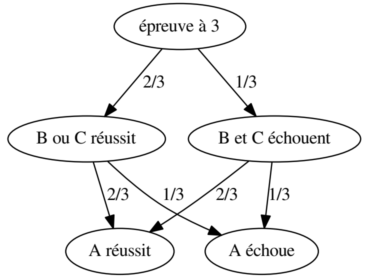

FIG. 1: probabilités conditionnelles

De même
$$p(CA_{n+1}|ABC_n) = p(\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{B}} \cap \overline{\mathcal{C}}) = \frac{2}{9}$$

   d. – Si A, B, C ne sont pas éliminés, personne ne vise C, C ne peut donc pas être éliminé. D'où
$$p(A_{n+1}|ABC_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad p(B_{n+1}|ABC_n) = 0$$
   – Comme dans la question précédente
$$p(C_{n+1}|ABC_n) = p(\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})) = \frac{4}{9} \qquad \text{par 1c)}$$

   e. Si à une étape il reste A et C alors A vise sur C et C vise sur A. L'événement $A_{n+1} \cap CA_n$ est donc l'événement CA_n inter l'événement "A rate son tir et C réussit son tir à l'étape n". Par indépendance des tirs, on a donc
$$p(A_{n+1}|CA_n) = p(\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{C}}) = \frac{4}{9}$$
De même
$$p(B_{n+1}|BC_n) = p(\mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{C}}) = \frac{1}{3} \qquad p(C_{n+1}|CA_n) = p(\mathcal{C} \cap \overline{\mathcal{A}}) = \frac{1}{9}$$
et
$$p(C_{n+1}|BC_n) = p(\mathcal{C} \cap \overline{\mathcal{B}}) = \frac{1}{6}$$

Rémy Nicolai M1614C

f. On a toujours, si A, B, C ne sont pas éliminés, personne ne vise C, C ne peut donc pas être éliminé, d'où

$$p(\emptyset_{n+1}|ABC_n) = 0$$

D'autre part,

$$p(\emptyset_{n+1}|BC_n) = p(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = \frac{1}{6} \qquad p(\emptyset_{n+1}|CA_n) = p(\mathcal{C} \cap \mathcal{A}) = \frac{2}{9}$$

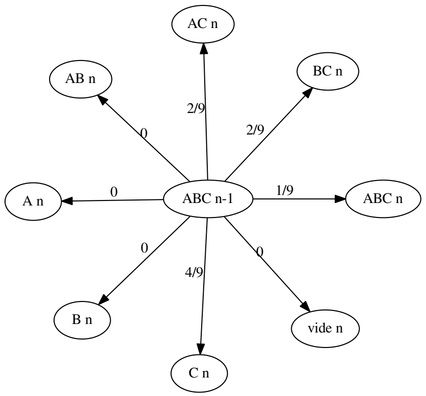

Fig. 2: issues épreuve à 3

3. Nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles s'achève le combat.

a. L'événement T_1 est l'union disjointe des événements A_1, B_1, C_1, $\emptyset_1$. La probabilité des événements A_1, B_1, C_1, $\emptyset_1$ a été calculé en d) et e) en prenant $n = 0$ et en utilisant que ABC_0 est l'événement certain. On trouve donc

$$p(T_1) = p(A_1) + p(B_1) + p(C_1) + p(\emptyset_1) = 0 + 0 + \frac{4}{9} + 0 = \frac{4}{9}$$

b. Soit $n \geq 2$. Remarquons que pour $0 \leq k \leq n$

$$ABC_0 \cap ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_{k-1} \cap ABC_k = ABC_k$$

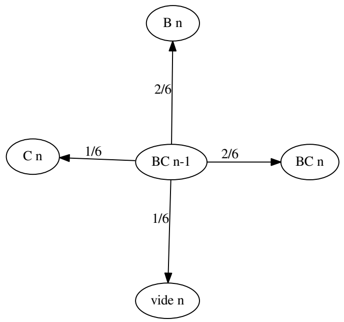

Fig. 3: issues épreuve avec BC

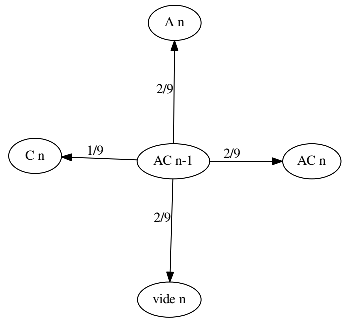

Fig. 4: issues épreuve avec AC

D'où, par la question 2b.,

$$\begin{aligned} &p(ABC_1 \cap ABC_2 \cap \cdots \cap ABC_{n-1} \cap ABC_n) \\ &\qquad = p(ABC_1|ABC_0)p(ABC_2|ABC_1)\dots p(ABC_n|ABC_{n-1}) = \frac{1}{9^n} \end{aligned}$$

c. Soit $n \geq 2$ et soit $0 \leq k \leq n-1$, on trouve de même :

$$\begin{aligned} &p(ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \cdots \cap CA_n) \\ &\qquad = p(ABC_1|ABC_0)\dots p(ABC_k|ABC_{k-1})p(CA_{k+1}|ABC_k) \\ &\qquad\qquad p(CA_{k+2}|CA_{k+1}))\dots p(CA_n|CA_{n-1}) \\ &\qquad = \left(\frac{1}{9}\right)^k \frac{2}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-k-1} = \frac{2^{n-k}}{9^n} \end{aligned}$$

d. Soit $n \geq 2$ et soit $0 \leq k \leq n-1$:

$$\begin{aligned} &p(ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \cdots \cap BC_n) \\ &\quad = p(ABC_1 | ABC_0) \ldots p(ABC_k | ABC_{k-1}) p(BC_{k+1} | ABC_k) \\ &\qquad p(BC_{k+2} | BC_{k+1})) \ldots p(BC_n | BC_{n-1}) \\ &\quad = \left(\frac{1}{9}\right)^k \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1} = \frac{2}{3^{n+k+1}} \end{aligned}$$

e. Soit $n \geq 2$. Notons $T_{>n}$ l'événement étudié. Le combat n'est pas fini à l'issue de la n-ième épreuve si à l'issue de la n-ième épreuve il reste deux ou trois tireurs. $T_{>n}$ est la réunion disjointe de ABC_n, AB_n (qui est l'événement impossible), CA_n et BC_n.
D'autre part,
- CA_n est l'union disjointe des événements $ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \cdots \cap CA_n$, pour $0 \leq k \leq n-1$
- BC_n est l'union disjointe des événements $ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \cdots \cap BC_n$, pour $0 \leq k \leq n-1$.

D'où, d'après les questions b), c) et d)

$$\begin{aligned} p(T_{>n}) &= \frac{1}{9^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{n-k}}{9^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{3^{n+k+1}} \\ &= \frac{1}{9^n} + \frac{2^{n+1}-2}{9^n} + \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{9^n}\right) = \frac{2^{n+1}+3^n-2}{9^n} \end{aligned}$$

On a $T_{>n-1}$ est l'union disjointe de T_n et $T_{>n}$. Donc

$$p(T_n) = p(T_{>n-1}) - p(T_{>n}) = \frac{2^n + 3^{n-1} - 2}{9^{n-1}} - \frac{2^{n+1}+3^n-2}{9^n}$$

Pour $n = 1$, $\frac{2^n+3^{n-1}-2}{9^{n-1}} - \frac{2^{n+1}+3^n-2}{9^n} = \frac{4}{9}$ ce qui correspond à la probabilité de T_1.

f. Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $t_k = \frac{2^{k+1}+3^k-2}{9^k}$.
Soit $n \geq 1$. D'après la formule précédente (valable dès $k = 1$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} p(T_k) = \sum_{k=1}^{n} (t_{k-1} - t_k) &= t_0 - t_n \quad \text{(sommation en dominos)} \\ &= 1 - \frac{2^{n+1}+3^n-2}{9^n} \end{aligned}$$

qui tend bien vers 1 en $+\infty$. D'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} kp(T_k) = \sum_{k=1}^{n} k(t_{k-1} - t_k) &= \left(\sum_{k=1}^{n} t_{k-1}\right) - nt_n \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{k+1}+3^k-2}{9^k}\right) - n\frac{2^{n+1}+3^n-2}{9^n} \end{aligned}$$

Ce qui permet de calculer l'espérance :

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{k+1}}{9^k} &\text{ tend vers } \frac{18}{7} \\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3^k}{9^k} &\text{ tend vers } \frac{3}{2} \\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{9^k} &\text{ tend vers } \frac{9}{4} \\ n\frac{2^{n+1}+3^n-2}{9^n} &\text{ tend vers } 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} kp(T_k) \text{ tend vers } \frac{51}{28}$$

4. Probabilités pour que A, B, C remportent le combat

a. Si A est le seul tireur restant à l'issue de la n-ième étape alors B et C ont été éliminés avant selon le schéma suivant.

$$\text{(ABC)} \xrightarrow{k \text{ fois}} \text{(ABC)} \to \text{(AC)} \xrightarrow{n-k-2 \text{ fois}} \text{(AC)} \to \text{(A)}$$

Comme déjà vu, tant qu'aucun des tireurs n'est éliminé à chaque étape A vise B, B et C visent A. B est donc éliminé (strictement) avant C. Dès que C est éliminé, A gagne. On voit donc que l'événement A_1 est impossible et que pour $n \geq 2$, A_n est l'union disjointe des

$$ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \cdots \cap CA_{n-1} \cap A_n$$

pour $0 \leq k \leq n-2$ (où k correspond à l'étape où B a été éliminé).

b. Soit $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n-2$. D'après la formule des probabilités composées, la probabilité de l'événement correspondant au schéma indiqué est

$$\left(\frac{1}{9}\right)^k \times \frac{2}{9} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k-2} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{9^n} 2^{n+1-k}$$

Rémy Nicolai M1614C

Ces événements indexés par k sont disjoints, la probabilité que A remporte le combat à l'issue de l'épreuve n est donc la somme des probabilités

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{9^n} 2^{n+1-k} = \frac{1}{9^n}\left(2^{n+1} + \cdots + 2^3\right) = \frac{2^{n+2} - 2^3}{9^n} = 4\left(\frac{2}{9}\right)^n - 8\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

c. L'événement A est l'union disjointe des A_n pour $n \geq 2$. Donc $p(A)$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=2}^{n} p(A_k)$. On obtient $p(A) = \frac{1}{63} PB$.

$$p(A) = 4\left(\frac{2}{9}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{2}{9}} - 8\left(\frac{1}{9}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{16}{9\times 7} - \frac{8}{9\times 8} = \frac{16-7}{9\times 7} = \frac{1}{7}$$

d. Suivant le même principe B_n est l'union disjointe, pour $0 \leq k \leq n-2$, des

$$ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \cdots \cap BC_{n-1} \cap B_n$$

Soit $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n-2$

$$\begin{aligned}
&p(ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \cdots \cap BC_{n-1} \cap B_n) \\
&\quad = p(ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \cdots \cap BC_{n-1}) p(B_n | BC_{n-1}) \\
&\quad = \frac{2}{3^{n+k}} \frac{1}{3} = \frac{2}{3^{n+k+1}}
\end{aligned}$$

D'où

$$p(B_n) = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{2n-1}}$$

Donc $p(B)$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=2}^{n} p(B_k)$. On obtient

$$p(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 3\left(\frac{1}{9}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{8}$$

e. Pour que C gagne le combat à l'étape n il y a plusieurs cas de figure :

– Soit A et B sont éliminés en même temps. Notons $C_{n,AB}$ cet événement. C'est aussi $ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_{n-1} \cap C_n$ de probabilité

$$p(ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_{n-1} \cap C_n) = p(ABC_{n-1}) p(C_n | ABC_{n-1}) = \frac{1}{9^{n-1}} \frac{4}{9} = \frac{4}{9^n}$$

– Soit A est éliminé puis B. Notons $C_{n,B}$ cet événement. C'est l'union disjointe, pour $0 \leq k \leq n-2$, des événements

$$ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \cdots \cap BC_{n-1} \cap C_n$$

Soit $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n-2$

$$\begin{aligned}
&p(ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \cdots \cap BC_{n-1} \cap C_n) \\
&\quad = p(ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \cdots \cap BC_{n-1}) p(C_n | BC_{n-1})) \\
&\quad = \frac{2}{3^{n+k}} \frac{1}{6} = \frac{1}{3^{n+k+1}}
\end{aligned}$$

La probabilité de $C_{n,B}$ est donc :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{2n-1}}\right)$$

– Soit B est éliminé puis A. Notons $C_{n,A}$ cet événement. C'est l'union disjointe, pour $0 \leq k \leq n-2$, des événements

$$ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \cdots \cap CA_{n-1} \cap C_n$$

Soit $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n-2$

$$\begin{aligned}
&p(ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \cdots \cap CA_{n-1} \cap C_n) \\
&\quad = p(ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \cdots \cap CA_{n-1}) p(C_n | CA_{n-1}) \\
&\quad = \frac{2^{n-k-1}}{9^{n-1}} \frac{1}{9} = \frac{2^{n-1-k}}{9^n}
\end{aligned}$$

La probabilité de $C_{n,A}$ est donc

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{2^{n-1-k}}{9^n} = \frac{1}{9^n}(2^n - 2)$$

L'événement C_n est l'union disjointe des $C_{n,AB}$, $C_{n,B}$ et $C_{n,A}$ Donc $p(C)$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} p(C_{n,AB}) + \sum_{k=2}^{n} p(C_{n,B}) + \sum_{k=2}^{n} p(C_{n,A})$$

On obtient :

$$\left.\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p(C_{n,AB}) & \text{tend vers } \dfrac{1}{2} \\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n} p(C_{n,B}) & \text{tend vers } \dfrac{1}{16} \\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n} p(C_{n,A}) & \text{tend vers } \dfrac{1}{28} \end{array}\right\} \Rightarrow p(C) = \frac{67}{112}$$

PARTIE II

1. Expression de la matrice de transition M

   a. On trouve

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{9} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence, $E_n = M^n E_0$.

2. Calcul des puissances de la matrice M.

   a. Vérification évidente à l'aide du produit par blocs.

   b. En lisant dans la matrice de transition, on trouve

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{4}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

   c.

3. Diagonalisation de la matrice U

   a. Le système considéré admet une solution non nulle si la matrice $U - \lambda I_3$ n'est pas inversible. Notons $P(\lambda)$ le déterminant de cette matrice.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{9} - \lambda & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} - \lambda & 0 \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} - \lambda \end{vmatrix} = (\frac{1}{9} - \lambda)(\frac{1}{3} - \lambda)(\frac{2}{9} - \lambda)$$

   D'où $\lambda_1 = \frac{1}{9}$, $\lambda_2 = \frac{2}{9}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{3}$.
   La résolution des systèmes donne $V_1 = (1, -1, -2)$, $V_2 = (0, 0, 1)$ et $V_3 = (0, 1, 0)$.

   b. D'après la formule de changement de base, on obtient le résultat cherché, en formant la matrice des vecteurs propres trouvés soit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Calcul de la limite des puissances de la matrice M.

   a. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{9^n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2^n}{9^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$$

et

$$I_3 + D + \cdots + D^n = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} - \frac{1}{8.9^n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{7} - \frac{2^{n+1}}{7.9^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} - \frac{1}{2.3^n} \end{pmatrix}$$

b. On obtient que (D^n) converge vers la matrice nulle et que $(I_3 + D + \cdots + D^n)$ converge vers la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

De $U = PDP^{-1}$, on tire $U^n = PD^nP^{-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que (U^n) converge vers $P0P^{-1}$ ie vers la matrice nulle et $(I_3 + U + \cdots + U^n)$ converge vers la matrice

$$P \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{9}{28} & 0 & \frac{9}{7} \end{pmatrix}$$

c. D'après l'expression de M^n trouvée en 2)c) et en utilisant que $(V + VU + \cdots + VU^n)$ converge vers la matrice

$$V \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{9}{28} & 0 & \frac{9}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{67}{112} & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \\ \frac{15}{112} & \frac{1}{4} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Donc

$$E_n = M^n E_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{7} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{67}{112} \\ \frac{15}{112} \end{pmatrix}$$

d. On retrouve bien que $(p(ABC_n))$, $(p(BC_n))$ et $(p(CA_n))$ convergent vers 0, que $(p(A_n))$ converge vers $\frac{1}{7}$, que $(p(B_n))$ converge vers $\frac{1}{8}$, que $(p(C_n)$ converge vers $\frac{67}{112}$ et que $(p(\emptyset_n)$ converge vers $\frac{15}{112}$.