

On considère<sup>1</sup> une compétition entre trois tireurs A, B, C, qui se déroule en une suite d'épreuves de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins deux des trois tireurs :

- Tous les tirs sont indépendants les uns des autres.
- Lorsque A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à  $\frac{2}{3}$ .
- Lorsque B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à  $\frac{1}{2}$ .
- Lorsque C tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à  $\frac{1}{3}$ .
- Lorsque qu'un des tireurs est atteint, il est définitivement éliminé des épreuves suivantes.
- À chacune des épreuves, les tireurs non encore éliminés tirent simultanément et chacun d'eux vise le plus dangereux de ses rivaux non encore éliminés.  
(Ainsi, à la première épreuve, A vise B tandis que B et C visent A).

Pour tout nombre entier  $n \geq 1$ , on considère les événements suivants :

- $ABC_n$  : « à l'issue de la n-ième épreuve, A, B et C ne sont pas encore éliminés ».
  - $AB_n$  : « à l'issue de la n-ième épreuve, seuls A et B ne sont pas encore éliminés ».
- On définit de façon analogue les événements  $BC_n$  et  $CA_n$ .
- $A_n$  : « à l'issue de la n-ième épreuve, seul A n'est pas éliminé ».
- On définit de façon analogue les événements  $B_n$  et  $C_n$ .
- $\emptyset_n$  : « à l'issue de la n-ième épreuve, les trois tireurs sont éliminés ».
  - Enfin,  $ABC_0$  est l'événement certain,  $AB_0$ ,  $BC_0$ ,  $CA_0$ ,  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$ ,  $\emptyset_0$  l'événement impossible.

## PARTIE I

On détermine les probabilités pour que A, B, C remportent la compétition.

### 1. Calcul de probabilités.

- a. Exprimer, si U et V désignent deux événements quelconques d'un espace probabilisé donné, la probabilité  $p(U \cup V)$  en fonction de  $p(U)$ ,  $p(V)$  et  $p(U \cap V)$ .
- b. En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C : (A rate son tir) et (B ou C réussissent leur tir).
- c. En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C : (A réussit son tir) et (B ou C réussissent leur tir).

### 2. Détermination de probabilités conditionnelles. Soit $n \geq 1$ .

- a. Montrer que l'événement  $AB_n$  est impossible. Dans la suite, on ne considérera donc que les événements  $ABC_n$ ,  $BC_n$ ,  $CA_n$ ,  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $\emptyset_n$ .

- b. Expliciter la probabilité conditionnelle  $p(ABC_{n+1}|ABC_n)$ .
- c. Expliciter  $p(BC_{n+1}|ABC_n)$  à l'aide de la question 1), puis donner

$$p(CA_{n+1}|ABC_n)$$

- d. Expliciter  $p(A_{n+1}|ABC_n)$ ,  $p(B_{n+1}|ABC_n)$  et  $p(C_{n+1}|ABC_n)$ .
- e. Expliciter  $p(A_{n+1}|CA_n)$ ,  $p(B_{n+1}|BC_n)$ ,  $p(C_{n+1}|CA_n)$  et  $p(C_{n+1}|BC_n)$ .
- f. Expliciter  $p(\emptyset_{n+1}|ABC_n)$ ,  $p(\emptyset_{n+1}|BC_n)$  et  $p(\emptyset_{n+1}|CA_n)$ .

### 3. Nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles s'achève la compétition.

On note  $T_n$  l'événement « Le combat cesse à l'issue de la n-ième épreuve » (la compétition cesse à l'issue de la n-ième épreuve s'il n'a pas cessé avant et si à l'issue de la n-ième épreuve il ne reste qu'un tireur au plus).

- a. Quelle est la probabilité de l'événement  $T_1$  ?
- b. Soit  $n \geq 2$ . Calculer la probabilité de l'événement :

$$ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_{n-1} \cap ABC_n$$

- c. Soit  $n \geq 2$ . Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants pour les entiers  $0 \leq k \leq n-1$  :

$$ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n$$

(pour  $k = 0$ , il s'agit de l'événement  $CA_1 \cap CA_2 \cap \dots \cap CA_n$ ).

- d. Soit  $n \geq 2$ . Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants pour les entiers  $0 \leq k \leq n-1$  :

$$ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_n$$

(pour  $k = 0$ , il s'agit de l'événement  $BC_1 \cap BC_2 \cap \dots \cap BC_n$ ).

- e. Soit  $n \geq 2$ . Calculer la probabilité de l'événement « la compétition n'est pas terminée à l'issue de la n-ième épreuve ». En déduire la probabilité  $p(T_n)$  (on vérifiera que cette formule redonne bien pour  $n = 1$  le résultat obtenu à la question a)).
- f. Montrer que la somme  $\sum_{k=1}^n p(T_k)$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Puis déterminer sous forme de fraction irréductible la limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $\sum_{k=1}^n kp(T_k)$  (cela correspond au nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles s'achève la compétition).

<sup>1</sup>D'après ESSEC 2000, option scientifique, maths 2

4. Probabilités pour que A, B, C remportent la compétition.
- Montrer que, si  $n = 1$ , l'événement « A remporte la compétition à l'issue de la  $n$ -ième épreuve » est impossible. Montrer qu'il est égal à la réunion des événements suivants si  $n \geq 2$  :
 
$$ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_{n-1} \cap A_n \text{ pour } 0 \leq k \leq n-2$$
 (pour  $k = 0$ , il s'agit de l'événement  $CA_1 \cap CA_2 \cap \dots \cap CA_{n-1} \cap A_n$ ).
  - Calculer la probabilité pour que A remporte la compétition à l'issue de la  $n$ -ième épreuve ( $n \geq 2$ ).
  - En déduire la probabilité pour que A remporte la compétition (c'est à dire pour qu'il ne soit pas éliminé à l'issue du combat).
  - Déterminer de même la probabilité pour que B remporte la compétition.
  - Déterminer de même la probabilité pour que C remporte la compétition.

## PARTIE II

Dans cette partie, on retrouve par des méthodes matricielles les probabilités pour que A, B, C remportent la compétition en n'utilisant que les résultats des questions I.1) et I.2).

- Expression de la matrice de transition  $M$ .
  - On considère la matrice-colonne  $E_n$  à sept lignes dont les sept éléments sont dans cet ordre, du haut vers le bas,
 
$$p(ABC_n), p(BC_n), p(CA_n), p(A_n), p(B_n), p(C_n), p(\emptyset_n)$$
 Expliciter une matrice  $M \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$  telle que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $E_{n+1} = ME_n$ . On vérifiera que la somme de chacune des colonnes de  $M$  est égale à 1.
  - En déduire  $E_n$  en fonction de  $n$ , de  $M$  et  $E_0$ .
- Calcul des puissances de la matrice  $M$ .
  - On considère deux matrices carrées d'ordre 3 notées  $U'$ ,  $U''$  et deux matrices rectangulaires à 4 lignes et 3 colonnes notées  $V'$ ,  $V''$  et l'on forme les matrices carrées d'ordre 7 :

$$M' = \begin{pmatrix} U' & 0 \\ V' & I_4 \end{pmatrix} \quad M'' = \begin{pmatrix} U'' & 0 \\ V'' & I_4 \end{pmatrix}$$

où 0 désigne la matrice nulle à 3 lignes et 4 colonnes et  $I_4$  la matrice-identité d'ordre 4. Vérifier à l'aide des règles du produit matriciel l'égalité suivante :

$$M'M'' = \begin{pmatrix} U'U'' & 0 \\ V'U'' + V'' & I_4 \end{pmatrix}$$

- Expliciter les matrices  $U$  et  $V$  telles que :

$$M = \begin{pmatrix} U & 0 \\ V & I_4 \end{pmatrix}$$

- Établir enfin, pour  $n \geq 1$ , l'égalité suivante :

$$M^n = \begin{pmatrix} U^n & 0 \\ V + VU + \dots + VU^{n-1} & I_4 \end{pmatrix}$$

- Diagonalisation de la matrice  $U$ .
  - Déterminer trois réels  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$  tel que le système (d'inconnue  $X$ , matrice colonne de taille 3),  $UX = \lambda X$  ait une solution non nulle. Pour  $i = 1, 2, 3$ , déterminer  $V_i$  la solution du système  $UX = \lambda_i X$  telle que
    - la *première* composante de  $V_1$  vaut 1.
    - la *troisième* composante de  $V_2$  vaut 1.
    - la *deuxième* composante de  $V_3$  vaut 1.
  - Déterminer une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $D = P^{-1}UP$ . Préciser  $P^{-1}$ .

- Calcul de la limite des puissances de la matrice  $M$ .
  - Pour  $n \in \mathbb{N}$ , expliciter les matrices  $D^n$  et  $I_3 + D + D^2 + \dots + D^{n-1}$ .
  - On dit qu'une suite de matrices  $(X_n)$  à  $p$  lignes et  $q$  colonnes converge vers une matrice  $X$  à  $p$  lignes et  $q$  colonnes si chaque coefficient de la matrice  $X_n$  converge quand  $n$  tend vers  $+\infty$  vers le coefficient correspondant de la matrice  $X$ . On admettra (sous réserve d'existence) que la limite d'un produit est le produit des limites. Expliciter à l'aide des résultats précédents les limites des deux suites matricielles  $(D^n)$  et  $(I_3 + D + D^2 + \dots + D^{n-1})$ , puis des trois suites matricielles  $(U^n)$ ,  $(I_3 + U + U^2 + \dots + U^{n-1})$  et  $(V + VU + VU^2 + \dots + VU^{n-1})$ .
  - En déduire enfin les limites des deux suites matricielles  $(M^n)$  et  $(E_n)$ .
  - Vérifier que les suites  $(p(ABC_n))$ ,  $(p(BC_n))$  et  $(p(CA_n))$  convergent vers 0 et expliciter sous forme d'une fraction irréductible les limites des suites  $(p(A_n))$ ,  $(p(B_n))$ ,  $(p(C_n))$ ,  $(p(\emptyset_n))$ . Retrouver alors les probabilités obtenues en I pour que A, B, C remportent la compétition.