Exercice 1

1. Le système de relations vérifié par les a_i demandés est triangulaire :

$$\begin{array}{lllllcr}
a_0 & & & & & = & 1 \\
a_0 + & a_1 & & & & = & 1 \\
a_0 + & 2a_1 + & a_2 & & & = & 2 \\
a_0 + & 3a_1 + & 3a_2 + & a_3 & & = & 6 \\
a_0 + & 4a_1 + & 6a_2 + & 4a_3 + & a_4 & = & 24
\end{array}$$

On en tire $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 9$. Comme le système est triangulaire avec un coefficient 1 devant a_n, le dernier a_n s'exprime en fonction des a_k précédents et il est entier.

2. On exprime les coefficients du binôme avec des factorielles

$$\binom{m}{k}\binom{n}{m} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}\,\frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n!}{k!\,(m-k)!\,(n-m)!}$$
$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{(m-k)!\,(n-m)!} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

Cela permet de faire apparaitre une formule du binôme

$$\sum_{m\in[\![k,n]\!]}\binom{m}{k}\binom{n}{m}z^m = \binom{n}{k}\sum_{m\in[\![k,n]\!]}\binom{n-k}{m-k}z^m$$
$$= \binom{n}{k}\left(\sum_{m\in[\![k,n]\!]}\binom{n-k}{m-k}z^{m-k}\right)z^k = \binom{n}{k}\left(\sum_{i\in[\![0,n-k]\!]}\binom{n-k}{i}z^i\right)z^k$$
$$= \binom{n}{k}(1+z)^{n-k}z^k$$

3. La sommation sur le triangle s'écrit avec des doubles sommes

$$\sum_{(m,k)\in\mathcal{T}} t_{m,k} = \sum_{m\in[\![0,n]\!]}\left(\sum_{k\in[\![0,m]\!]} t_{m,k}\right) = \sum_{k\in[\![0,n]\!]}\left(\sum_{m\in[\![k,n]\!]} t_{m,k}\right)$$

4. On écrit la somme à droite comme une double somme et on intervertit les sommations :

$$\sum_{m\in[\![0,n]\!]} m!\binom{n}{m}(-1)^m = \sum_{m\in[\![0,n]\!]}\left(\sum_{k\in]\!]0,m[\![}\binom{m}{k}a_k\right)\binom{n}{m}(-1)^m$$
$$= \sum_{k\in[\![0,n]\!]} a_k\left(\sum_{m\in[\![k,n]\!]}\binom{m}{k}\binom{n}{m}(-1)^m\right) = \sum_{k\in[\![0,n]\!]} a_k\binom{k}{n}(1-1)^{n-k}(-1)^k$$

d'après la question 2 avec $z=-1$. Le seul indice k qui contribue de manière non nulle à la somme est donc $k=n$. On en tire

$$\sum_{m\in[\![0,n]\!]} m!\binom{n}{m}(-1)^m = a_n\binom{n}{n}(-1)^n = (-1)^n a_n$$

Exercice 2

1. Question de cours. Le système est de Cramer lorsque le déterminant est non nul :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D\end{vmatrix} = AD - BC \neq 0$$

Les formules de Cramer donnent alors l'unique couple solution :

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} \lambda & B \\ \mu & D\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D\end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} A & \lambda \\ C & \mu\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D\end{vmatrix}}\right)$$

2. Pour le système $\mathcal{S}_0$, le déterminant est

$$\frac{2}{a(a+1)}\left(\frac{1}{b(c+1)} - \frac{1}{c(b+1)}\right) = \frac{2(c-b)}{a(a+1)b(b+1)c(c+1)} \neq 0$$

De plus

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{(a+1)(b+1)} \\ 1 & \frac{2}{(a+1)(c+1)}\end{vmatrix} = \frac{2}{(a+1)}\left(\frac{1}{c+1} - \frac{1}{b+1}\right) = \frac{2(b-c)}{(a+1)(b+1)(c+1)} \Rightarrow u = -abc$$

Rémy Nicolai M1803C

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{ab} & 1 \\ \frac{1}{ac} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) = \frac{c-b}{abc} \Rightarrow v = \frac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1)$$

L'unique couple solution est

$$(-abc, \frac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1))$$

3. On transforme $\mathcal{S}$ en un système équivalent par la méthode du pivot standard avec l'opération élémentaire codée par

$$L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{a-1}{b-1} L_1.$$

On obtient

$$\left(\frac{1}{b} - \frac{a-1}{b-1} \times \frac{1}{a}\right) y + \left(\frac{1}{b+1} - \frac{a-1}{b-1} \times \frac{1}{a+1}\right) z = 1 - \frac{a-1}{b-1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{b-a}{ab(b-1)} y + \frac{2(b-a)}{(a+1)(b-1)(b+1)} z = \frac{b-a}{b-1} \Leftrightarrow \frac{1}{ab}\, y + \frac{2}{(a+1)(b+1)}\, z = 1$$

Pour $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a-1}{c-1} L_1$, les calculs sont analogues en échangeant b et c. On obtient

$$\frac{1}{ac}\, y + \frac{2}{(a+1)(c+1)}\, z = 1.$$

Ces transformations montrent que si (x, y, z) est solution de $\mathcal{S}$ alors (y, z) est solution de $\mathcal{S}_0$. D'après la question 2

$$\left.\begin{aligned} &y = -abc \\ &z = \frac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = (a-1)\left(1 + bc - \frac{1}{2}(b+1)(c+1)\right)$$
$$= \frac{1}{2}(a-1)(1 + bc - b - c) = \frac{1}{2}(a-1)(b-1)(c-1)$$

L'unique triplet solution de $\mathcal{S}$ est donc

$$\left(\frac{1}{2}(a-1)(b-1)(c-1), -abc, \frac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1)\right)$$