Exercice 1

1. La fonction est définie dans $\mathbb{R}$ car $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ et $\frac{2x}{1+x^2}$ sont dans $[-1,1]$. En effet :

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}-1=\frac{-2x^2}{1+x^2}\leq 0 \qquad \frac{1-x^2}{1+x^2}+1=\frac{2}{1+x^2}\geq 0$$
$$\frac{2x}{1+x^2}-1=-\frac{(1-x)^2}{1+x^2}\leq 0 \qquad \frac{(1+x)^2}{1+x^2}+1\geq 0$$

2. a. On utilise les formules de cours

$$\arccos(-u)=\pi-\arccos u \qquad \arcsin(-u)=-\arcsin u$$

b. En combinant les relations précédentes, on obtient

$$\left.\begin{aligned} f(\frac{1}{x}) &= \arccos\left(-\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)+\arcsin\frac{2x}{1+x^2} \\ f(-x) &= \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}+\arcsin\left(-\frac{2x}{1+x^2}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(\frac{1}{x})+f(-x)=\pi$$

3. On reconnait les formules donnant le sin et le cos en fonction des tan de la moitié. On a donc, pour $x=\tan\theta$:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}=\cos(2\theta) \qquad \frac{2x}{1+x^2}=\sin(2\theta)$$

4. On pose $\theta=\arctan x$ et on exprime $f(x)$ dans quatre cas selon le tableau suivant :

x	$]-\infty,-1]$	$[-1,0]$	$[0,1]$	$[1,+\infty[$
θ	$]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}]$	$[-\frac{\pi}{4},0]$	$[0,\frac{\pi}{4}]$	$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$
2θ	$]-\pi,-\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2},0]$	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi[$
$\arccos(\cos(2\theta))$	-2θ	-2θ	2θ	2θ
$\arcsin(\sin(2\theta))$	$-\pi-2\theta$	2θ	2θ	$\pi-2\theta$
$f(x)$	$-\pi-4\arctan x$	0	$4\arctan x$	π

On en déduit le graphe de f (figure **??**). On aurait pu se limiter aux deux intervalles dans $\mathbb{R}_+$ et obtenir les autres expressions avec le résultat de 2.b.

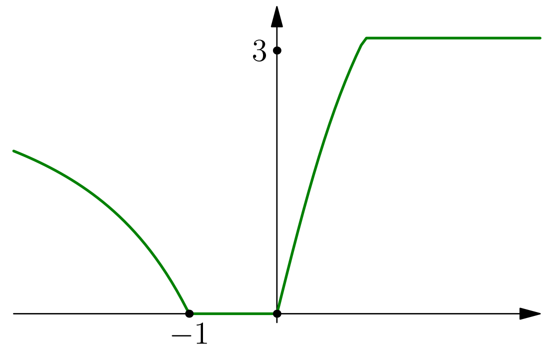

FIG. 1: Graphe de $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)+\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

Exercice 2

1. a. Prenons $y=0$ dans la relation fonctionnelle. On obtient, pour tous les réels x,

$$2f(x)=2f(x)f(0)$$

Comme f n'est pas la fonction nulle, il existe un x tel que $f(x)\neq 0$. Pour un tel x, on peut simplifier par $f(x)$ et obtenir $f(0)=1$.
Prenons $x=0$ dans la relation fonctionnelle. On obtient, pour tous les réels y,

$$f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)$$

d'où l'on tire $f(y)=f(-y)$ pour tous les y car $f(0)=1$. La fonction f est donc paire.

b. Pour tous les réels y, les fonctions

$$x\rightarrow f(x+y)+f(x-y) \text{ et } x\rightarrow 2f(x)f(y)$$

sont dérivables et égales. Leurs dérivées sont donc égales :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f'(x+y)+f'(x-y)=2f'(x)f(y)$$

Pour tous les réels y, les fonctions

$$x\rightarrow f'(x+y)+f'(x-y) \text{ et } x\rightarrow 2f'(x)f(y)$$

sont dérivables et égales. Leurs dérivées sont donc égales :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y)$$

Reprenons le même raisonnement mais en considérant et en dérivant cette fois les fonctions de y. On obtient successivement :

$$\begin{aligned} f'(x+y) - f'(x-y) =& 2f(x)f'(y) \\ f''(x+y) + f''(x-y) =& 2f(x)f''(y) \end{aligned}$$

On en déduit la formule demandée.

c. Pour tout réel y tel que $f(y) \neq 0$, la fonction f est solution de l'équation différentielle à coefficients constants d'inconnue z

$$f(y)z'' - f'(y)z = 0$$

En particulier, on sait que $f(0) = 1$, f est donc solution de

$$z'' - \lambda^2 z = 0$$

avec λ complexe tel que $f''(0) = \lambda^2$. On connait les solutions d'une telle équation différentielle. Supposons d'abord $\lambda \neq 0$. Il existe alors des complexes A et B tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$$

car λ et $-\lambda$ sont les deux racines de l'équation caractéristique.
De $f(0) = 1$ on tire $A+B = 1$. Comme f est paire, f' est impaire donc $f'(0) = 0$ d'où on tire $A = B = \frac{1}{2}$. On obtient bien :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}\right)$$

Est-il possible que λ soit nul ? Cela revient à $f''(0) = 0$ et f est alors solution de.

$$z'' = 0$$

Il existe donc des complexes A et B tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = Ax + B$$

De $f(0) = 1$ on tire $B = 1$ et de la parité de f on tire $A = 0$. La fonction f est donc constante de valeur 1. Cette fonction est encore une somme d'exponentielles avec $\lambda = 0$.

2. a. On suppose ici

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda x} + e^{\lambda x}\right)$$

alors :

$$\begin{aligned} 2f(x)f(y) &= \frac{1}{2}\left(e^{\lambda(x+y)} + e^{\lambda(x-y)} + e^{\lambda(-x+y)} + e^{\lambda(-x-y)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{\lambda(x+y)} + e^{\lambda(-x-y)}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{\lambda(x-y)} + e^{\lambda(-x+y)}\right) \\ &= f(x+y) + f(x-y) \end{aligned}$$

b. Les seules fonctions deux fois dérivables à valeurs réelles qui vérifient la relation sont :
– la fonction constante égale à 1
– les fonctions $t \to \cos\lambda t$ avec λ réel.
– la fonction $t \to \operatorname{ch}\lambda t$ avec λ réel.
En effet notons $a = \operatorname{Re}\lambda$ et $b = \operatorname{Im}\lambda$ et étudions dans quel cas les fonctions de la question 2. sont à valeurs réelles :

$$\begin{aligned} & e^{\lambda x} + e^{-\lambda x} = e^{\overline{\lambda}x} + e^{-\overline{\lambda}x} \\ & \Leftrightarrow e^{\lambda x} - e^{\overline{\lambda}x} = e^{-\overline{\lambda}x} - e^{-\lambda x} \Leftrightarrow e^{\overline{\lambda}x}\left(e^{(\lambda-\overline{\lambda})x} - 1\right) = e^{-\lambda x}\left(e^{(\lambda-\overline{\lambda})x} - 1\right) \\ & \Leftrightarrow \left(e^{(\lambda-\overline{\lambda})x} - 1\right)\left(e^{\overline{\lambda}x} - e^{-\lambda x}\right) = 0 \Leftrightarrow e^{-\lambda x}\left(e^{(\lambda-\overline{\lambda})x} - 1\right)\left(e^{(\lambda+\overline{\lambda})x} - 1\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow e^{-\lambda x}\left(e^{2ibx} - 1\right)\left(e^{2ax} - 1\right) = 0 \end{aligned}$$

ceci ne peut se produire, *pour tous les* x, que si a ou b est nul c'est à dire λ réel ou imaginaire pur.

Exercice 3

1. Les solutions de l'équation caractéristique sont $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$. Les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions

$$t \to \lambda\cos\sqrt{2}t + \mu\sin\sqrt{2}t$$

où λ et μ sont des réels quelconques. Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme

$$t \to (at+b)e^t$$

Après calculs, on trouve $a = \frac{2}{3}$ et $b = -\frac{4}{9}$. Les solutions sont donc les fonctions

$$t \to \lambda \cos \sqrt{2}t + \mu \sin \sqrt{2}t + (\frac{2}{3}t - \frac{4}{9})e^t$$

2. a. Par hypothèse, f_1 et g_1 sont des fonctions dérivables. Comme $f_1'(t) = 2g_1(t)$ la fonction f_1' est dérivable donc f_1 est deux fois dérivable. En remplaçant le g_1' de la deuxième équation par l'expression tirée de la première, on obtient que f_1 est solution de l'équation différentielle traitée en question 1.

   b. D'après les résultats de 1. et $g_1 = \frac{1}{2}f_1'$, on obtient :

$$f_1(t) = \lambda \cos \sqrt{2}t + \mu \sin \sqrt{2}t + (\frac{2}{3}t - \frac{4}{9})e^t$$
$$g_1(t) = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t + \frac{\mu}{\sqrt{2}} \cos \sqrt{2}t + (\frac{1}{3}t - \frac{1}{9})e^t$$

3. En exprimant les conditions $f_1(0) = g_1(0) = 0$ pour les fonctions trouvées au dessus, on obtient

$$\lambda = \frac{4}{9} \qquad \mu = -\frac{\sqrt{2}}{9}$$

ce qui assure l'unicité du couple cherché.