Exercice 1

On se propose d'étudier la fonction f définie par :

$$f(x) = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$$

1. Montrer que f est définie dans $\mathbb{R}$.
2. a. Pour $u \in [-1,1]$, préciser $\arccos(-u)$ et $\arcsin(-u)$ en fonction de $\arcsin u$ et de $\arccos u$.
   b. Soit x un réel non nul, calculer
   $$f(\frac{1}{x}) + f(-x)$$
3. Si $x = \tan\theta$, exprimer
   $$\frac{1-x^2}{1+x^2} \qquad \frac{2x}{1+x^2}$$
   en fonction de θ.
4. En dégageant les cas pertinents pour x, simplifier $f(x)$. Tracer le graphe de f.

Exercice 2

On cherche[1] les fonctions deux fois dérivables dans $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \qquad (1)$$

1. Soit f une fonction qui n'est pas la fonction nulle et vérifiant la relation.
   a. Montrer que $f(0) = 1$ et que f est paire.
   b. Montrer que
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x)f''(y) = f''(x)f(y)$$
   c. Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}\right)$$
   où λ est une racine carrée (complexe) de $f''(0)$.
2. a. Montrer que pour tout nombre complexe λ, la fonction définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}\right)$$
   vérifie l'équation fonctionnelle.
   b. Quelles sont les fonctions à valeurs réelles qui vérifient la relation ?

Exercice 3

On cherche à déterminer les fonctions f_1 et g_1 définies et dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient

$$\forall t \in \mathbb{R} : \begin{cases} f_1'(t) = 2g_1(t) \\ g_1'(t) = -f_1(t) + te^t \end{cases}$$

1. Résoudre l'équation différentielle
   $$y'' + 2y = 2te^t$$
2. Soit (f_1, g_1) un couple de fonctions vérifiant le système.
   a. Montrer que f_1 est deux fois dérivable et solution d'une équation différentielle à préciser.
   b. En déduire g_1 puis les solutions du système.
3. Montrer qu'il existe un unique couple (f_1, g_1) de solutions du sytème tel que
   $$f_1(0) = g_1(0) = 0$$

[1] d'après Leçons sur quelques équations fonctionnelles E Picard 1928. Voir Aeqfonc2.pdf