Exercice 1.

1. Pour $x \in I$, $bx \in \left[-\frac{b}{a}, \frac{b}{a}\right] \subset \left]-1,1\right[$. La partie en arccos est donc dérivable dans I. En revanche, la partie en arcsin n'est dérivable que dans l'ouvert. D'après les expressions des dérivées :
$$\forall x \in \left]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right[,\ f'(x) = \frac{a}{\sqrt{1-(ax)^2}} - \frac{b}{\sqrt{1-(bx)^2}}$$
Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de
$$\left(a\sqrt{1-(bx)^2} - b\sqrt{1-(ax)^2}\right)\left(a\sqrt{1-(bx)^2} + b\sqrt{1-(ax)^2}\right) = \\ a^2 - (abx)^2 - b^2 + (abx)^2 = a^2 - b^2 > 0$$
On en déduit que f est strictement croissante d'après le théorème du tablau de variations.
2. La fonction f est injective car elle est strictement croissante. D'après le tableau de variations de f, elle définit une bijection de I vers $f(I) = \left[f(-\frac{1}{a}), f(\frac{1}{a})\right]$. Or
$$f(-\frac{1}{a}) = \arcsin(-1) + \arccos(-\frac{b}{a}) = -\frac{\pi}{2} + \left(\pi - \arccos(\frac{b}{a})\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\frac{b}{a})$$
De même
$$f(\frac{1}{a}) = \arcsin(1) + \arccos(\frac{b}{a}) = \frac{\pi}{2} + \arccos(\frac{b}{a})$$
On a donc bien $f(I) = J$.
3. Dans le calcul de $\cos(f(x))$, on utilise :
$$\cos(\arccos(bx)) = bx,\ \sin(\arcsin(ax)) = ax,\ \cos(\arcsin(ax)) = \sqrt{1-(ax)^2}, \\ \sin(\arccos(bx)) = \sqrt{1-(bx)^2}$$
car $\sin\circ\arccos$ et $\cos\circ\arcsin$ sont à valeurs positives à cause des intervalles choisis pour définir les fonctions réciproques. En utilisant l'expression de $\cos(u+v)$, il vient
$$\cos(f(x)) = x(b\sqrt{1-(ax)^2} - a\sqrt{1-(bx)^2})$$
Le facteur de x est négatif, son signe a déjà été trouvé lors de l'étude de la dérivée.
4. De même, avec $\sin(u+v)$:
$$\sin(f(x)) = abx^2 + \sqrt{1-(bx)^2}\sqrt{1-(ax)^2} \Rightarrow \\ \cos^2(f(x)) = x^2a^2(1-(xb)^2) + x^2b^2(1-(ax)^2) - 2abx^2\sqrt{1-(bx)^2}\sqrt{1-(ax)^2} \\ = x^2a^2 + x^2b^2 - 2a^2b^2x^4 - 2abx^2\left(\sin(f(x)) - abx^2\right) = x^2a^2 + x^2b^2 - 2abx^2\sin(f(x))$$
5. Pour tout $y \in J$, notons $x = f^{-1}(y)$; alors $y = f(x)$. D'après la relation de la question précédente et comme $\cos(f(x)$ est du signe opposé à celui de x (question 3) :
$$f^{-1}(y) = -\frac{\cos y}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin y}}$$
6. On applique l'expression de la bijection réciproque obtenue dans la question précédente.
$$b = \frac{3}{5} < a = \frac{4}{5},\ \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$$
Pour justifier que $1 \in J$, on utilise une évaluation numérique à la machine :
$$\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{3}{4} \simeq 0.84 < 1 \Rightarrow 1 \in J$$
L'équation admet donc une seule solution
$$-\frac{\cos 1}{a^2+b^2-2ab\sin 1}$$
L'évaluation numérique de J montre aussi que $0 \notin J$ donc la deuxième équation n'admet aucune solution.

Exercice 2.

1. La relation de définition permet de compléter le tableau 1 des premiers coefficients de Rothe.
2. Notons $\mathcal{F}_n$ la formule à démontrer pour un naturel n. On raisonne par récurrence.
Pour $n = 1$. Le produit à gauche se réduit à $(1+x)$. La somme à droite se réduit à
$$c(1,0)q^0x^0 + c(1,1)q^0x^1 = 1 + x$$

Rémy Nicolai M1805C

$n\backslash p$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	$1+q$	1		
3	1	$1+q+q^2$	$1+q+q^2$	1	
4	1	$1+q+q^2+q^3$	$1+q+2q^2+q^3+q^4$	$1+q+q^2+q^3$	1

TAB. 1: Premiers coefficients de Rothe

Montrons que $\mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{F}_{n+1}$. Le calcul est analogue à la preuve de la formule du binôme.

$$\begin{aligned}(1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x)(1+q^nx) &= \left(\sum_{p=0}^{n} c(n,p)q^{\frac{p(p-1)}{2}}x^p\right)(1+q^nx)\\ &= \underbrace{\sum_{p=0}^{n} c(n,p)q^{\frac{p(p-1)}{2}}x^p}_{=S_1} + \underbrace{\sum_{p=0}^{n} c(n,p)q^{\frac{p(p-1)}{2}+n}x^{p+1}}_{=S_2}\end{aligned}$$

Dans S_2, on décale le nom de l'indice de p à $p+1$:

$$S_2 = \sum_{p=1}^{n+1} c(n,p-1)q^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}+n}x^p$$

Dans S_1+S_2, on regroupe les termes pour p entre 1 et n en remarquant que

$$\frac{(p-1)(p-2)}{2}+n = \frac{p(p-1)}{2}-(p-1)+n = \frac{p(p-1)}{2}+n-p+1$$

On obtient :

$$\begin{aligned}S_1+S_2 = &\underbrace{(n,0)q^0x^0}_{=1=c(n+1,0)q^0x^0} + \sum_{p=1}^{n} \underbrace{\left(c(n,p)+c(n,p-1)q^{n+1-p}\right)}_{=c(n+1,p)} q^{\frac{p(p-1)}{2}}x^p\\ &+ \underbrace{c(n,n)q^{\frac{n(n-1)}{2}+n}x^{n+1}}_{=c(n+1,n+1)q^{\frac{(n+1)n}{2}}x^{n+1}}\end{aligned}$$

ce qui prouve $\mathcal{F}_{n+1}$.

3. Il est important de noter que les coefficients de Rothe sont définis pour tous les z *complexes* non nuls.

   a. Par définition des coefficients de Rothe,

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \binom{n}{n}_q = 1 \text{ et } \binom{n}{1}_q = \frac{1-q^n}{1-q} = 1+q+\cdots+q^{n-1}$$

   Dans les tableaux donnant les valeurs des c et des coefficients de Rothe, la colonne $p=1$ ainsi que la diagonale $p=n$ coïncident. Il suffit donc de montrer que les coefficients de Rothe vérifient la *même relation* que les c pour prouver que les deux tableaux sont égaux.

   $$\begin{aligned}q^{n-p}\binom{n-1}{p-1}_q + \binom{n-1}{p}_q &= \binom{n-1}{p-1}_q\left(q^{n-p}+\frac{1-q^{n-1-p+1}}{1-q^p}\right)\\ &= \binom{n-1}{p-1}_q \frac{q^{n-p}-q^n+1-q^{n-p}}{1-q^p} = \binom{n}{p}_q\end{aligned}$$

   b. Le numérateur compte p facteurs (de 0 à $p-1$) et le dénominateur aussi. Tous les facteurs (du numérateur comme du dénominateur) se factorisent

   $$1-q^{machin} = (1-q)(1+q+\cdots+q^{machin-1})$$

   Tous facteurs $1-q$ se simplifient puisqu'il en a autant au numérateur qu'au dénominateur. Il ne reste que les sommes des termes en progression géométrique. Lorsque q tend vers 1, chacune converge vers son nombre de termes d'où

   $$\binom{n}{p}_q \to \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p(p-1)\cdots 1} = \binom{n}{p}$$

   c. Les exposants du numérateur de $\binom{p-z-1}{p}_q$ sont les opposés de ceux de $\binom{z}{p}_q$, les facteurs du dénominateur sont les mêmes. On met donc en facteur les puissances de q.

   $$\begin{aligned}&(1-q^z)\cdots(1-q^{z-p+1})\\ &\quad = q^{z+(z-1)+\cdots+(z-p+1)}(-1)^p \underbrace{(1-q^{p-z-1})(1-q^{p-z-2})\cdots(1-q^z)}_{p \text{ exposants consécutifs décroissants à partir de} z}\end{aligned}$$

De plus,

$$z + (z-1) + \cdots + (z-p+1) = pz - \frac{p(p-1)}{2}$$
$$\Rightarrow \binom{z}{p}_q = (-1)^p \, q^{pz - \frac{p(p-1)}{2}} \binom{p-z-1}{p}_q$$

Exercice 3.

1. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Effectuons l'intégration par parties suivante :

$$\begin{cases} u_1'(t) = \mathrm{ch}(t) \\ v_1(t) = \sin(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1(t) = \mathrm{sh}(t) \\ v_1'(t) = \cos(t) \end{cases}$$

On a alors :

$$F(x) = \int_0^x u_1'(t)v_1(t)\,dt = -\int_0^x u_1(t)v_1'(t)\,dt + [u_1(t)v_1(t)]_0^x$$
$$= -\int_0^x \mathrm{sh}(t)\cos(t)\,dt + \mathrm{sh}(x)\sin(x)$$

Calculons $\int_0^x \mathrm{sh}(t)\cos(t)\,dt$ à l'aide d'une intégration par parties. Posons :

$$\begin{cases} u_2'(t) = \mathrm{sh}(t) \\ v_2(t) = \cos(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2'(t) = \mathrm{ch}(t) \\ v_2'(t) = -\sin(t) \end{cases}$$

On a alors :

$$\int_0^x \mathrm{sh}(t)\cos(t)\,dt = \int_0^x u_2'(t)v_2(t)\,dt = -\int_0^x u_2(t)v_2'(t)\,dt + [u_2(t)v_2(t)]_0^x$$
$$= \int_0^x \mathrm{ch}(t)\sin(t)\,dt + \mathrm{ch}(x)\cos(x) - 1$$

On en déduit que $F(x) = -F(x) + \mathrm{sh}(x)\sin(x) - \mathrm{ch}(x)\cos(x) + 1$ soit encore :

$$F(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)\sin(x) - \mathrm{ch}(x)\cos(x) + 1}{2}.$$

b. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(t) = \mathrm{Im}(e^{it})$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \mathrm{Im}\left(\int_0^x \mathrm{ch}(t)e^{it}\,dt\right).$$

Calculons l'intégrale complexe :

$$\int_0^x \mathrm{ch}(t)e^{it}\,dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^x e^{(1+i)t}\,dt + \int_0^x e^{(-1+i)t}\,dt\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+i}\left(e^x e^{ix} - 1\right) + \frac{1}{-1+i}\left(e^{-x}e^{ix} - 1\right)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\left(e^x\cos x - 1 + ie^x \sin x\right)(1-i) - \left(e^{-x}\cos x - 1 + ie^{-x}\sin x\right)(1+i)\right]$$

En prenant la partie imaginaire, on obtient :

$$F(x) = \frac{1}{4}\left[-(e^x\cos x - 1) + e^x \sin x - \left(e^{-x}\cos x - 1\right) - e^{-x}\sin x\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\sin x\left(e^x - e^{-x}\right) - \cos x\left(e^x + e^{-x}\right) + 2\right] = \frac{\sin x \,\mathrm{sh}\, x - \cos x \,\mathrm{ch}\, x + 1}{2}$$

2. a. Effectuons le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u = \frac{b-t}{b-a} \\ du = -\frac{dt}{b-a} \end{cases}$$

Comme $b - t = (b-a)u$ et $t - a = (b-a)(1-u)$, on a, puisque $b - a \geq 0$: $\sqrt{(b-t)(t-a)} = \sqrt{(b-a)^2 u(1-u)} = (b-a)\sqrt{u(1-u)}$. Donc :

$$I(\alpha,\beta) = \int_{\frac{b-\alpha}{b-a}}^{\frac{b-\beta}{b-a}} \frac{-(b-a)du}{(b-a)\sqrt{u(1-u)}} = \int_{\frac{b-\beta}{b-a}}^{\frac{b-\alpha}{b-a}} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = J\left(\frac{b-\beta}{b-a}, \frac{b-\alpha}{b-a}\right).$$

b. Effectuons le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(\theta) \quad \text{soit } \theta = \arcsin(2u-1) \\ du = \frac{1}{2}\cos(\theta)d\theta \end{cases}$$

Ce changement de variables est possible puisque pour tout $u \in [x,y]$,

$$-1 < 2x - 1 < 2u - 1 < 2y - 1 < 1$$

On a : $u(1-u) = \frac{1}{4}(1-\sin(\theta))(1+\sin(\theta)) = \frac{1}{4}\cos^2(\theta)$. Comme $\cos(\theta) \geq 0$,

$$\sqrt{u(1-u)} = \sqrt{\frac{1}{4}\cos^2(\theta)} = \frac{1}{2}\cos(\theta)$$

donc on a :

$$J(x,y) = \int_{\arcsin(2x-1)}^{\arcsin(2y-1)} \frac{\cos(\theta)}{2\frac{1}{2}\cos(\theta)} = \int_{\arcsin(2x-1)}^{\arcsin(2y-1)} 1 \, d\theta$$
$$= \arcsin(2y-1) - \arcsin(2x-1).$$

c. On a pour tout $a < \alpha < \beta < b$:

$$I(\alpha,\beta) = \arcsin\left(\frac{2(b-\alpha)}{b-a} - 1\right) - \arcsin\left(\frac{2(b-\beta)}{b-a} - 1\right)$$

Lorsque α tend vers a et β tend vers b,

$$\begin{cases} \dfrac{b-\beta}{b-a} \to 0 \\ \dfrac{b-\alpha}{b-a} \to 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\dfrac{b-\beta}{b-a} - 1 \to -1 \\ 2\dfrac{b-\alpha}{b-a} - 1 \to 1 \end{cases} \Rightarrow I(\alpha,\beta) \to \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi.$$

Remarquons que

$$\frac{1}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } t \text{ tend vers } a \text{ ou } b.$$

On s'attend à ce que l'intégrale $I(\alpha,\beta)$ soit de plus en plus grande lorsque α tend vers a et β tend vers b. Elle reste néanmoins majorée.
Géométriquement, l'aire de la partie du plan délimitée horizontalement par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et verticalement par l'axe des abscisses et par le graphe de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}$ est finie.