Exercice 1.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < b < a$. On pose :

$$I = \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right], \qquad f : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \arcsin(ax) + \arccos(bx). \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right[$. Déterminer f' et montrer que f est strictement croissante.
2. Montrer que f réalise une bijection de I vers J avec
$$J = \left[\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{b}{a}\right), \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$
3. Soit $x \in I$. Exprimer $\cos(f(x))$. Montrer que $\cos(f(x))$ est du signe de $-x$.
4. Soit $x \in I$. Exprimer $\sin(f(x))$ puis montrer que :
$$\cos^2(f(x)) = x^2(a^2 + b^2 - 2ab\sin(f(x))).$$
5. Pour tout $y \in J$, déterminer une expression de $f^{-1}(y)$.
6. Application : Résoudre les équations :
$$\arcsin\left(\frac{4x}{5}\right) + \arccos\left(\frac{3x}{5}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \arcsin\left(\frac{4x}{5}\right) + \arccos\left(\frac{3x}{5}\right) = 0$$

Exercice 2.

Dans tout ce problème, $q > 1$ désigne un nombre réel fixé.
On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des couples (n, p) d'entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$. On admet qu'il existe une unique fonction c définie dans $\mathcal{T}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c(n, 0) = c(n, n) = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \forall p \in [\![1, n-1]\!] :\ c(n, p) = q^{n-p} c(n-1, p-1) + c(n-1, p)$$

1. Présenter dans un tableau les valeurs des $c(n, p)$ pour $0 \leq p \leq n \leq 4$.
2. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{C}$ et tout naturel non nul n, la relation
$$(1 + x)(1 + qx) \cdots (1 + q^{n-1}x) = \sum_{p=0}^{n} c(n, p)\, q^{\frac{p(p-1)}{2}}\, x^p$$
3. On note (coefficients de Rothe) [1], pour tous $z \in \mathbb{C}^*$,
$$\forall p \in \mathbb{N}^* : \binom{z}{p}_q = \frac{(1 - q^z)(1 - q^{z-1}) \cdots (1 - q^{z-p+1})}{(1 - q^p)(1 - q^{p-1}) \cdots (1 - q^1)}, \qquad \binom{z}{0}_q = 1.$$
   a. Montrer que $\binom{n}{p}_q = c(n, p)$ pour tous les $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$.
   b. Quel est le nombre de facteurs dans le numérateur et le dénominateur d'un coefficient de Rothe ? Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$, quelle est la limite de $\binom{n}{p}_q$ quand q tend vers 1 ?
   c. Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, préciser en fonction de p et z les exposants A et B tels que
$$\binom{z}{p}_q = (-1)^A\, q^B \binom{p - z - 1}{p}_q$$

Exercice 3.

Ce texte propose de simples applications du cours de calcul intégral.

1. On considère la fonction F définie dans $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x \operatorname{ch}(t)\sin(t)\, dt$$
   a. Calculer $F(x)$ en utilisant deux intégrations par parties.
   b. Independamment du calcul précédent, retrouver l'expression de F en développant à l'aide de exponentielles (réelles et complexes).
2. Soit $a < b$ deux nombres réels. Pour $a < \alpha < \beta < b$ et $0 < x < y < 1$, on définit
$$I(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{dt}{\sqrt{(b - t)(t - a)}}, \qquad J(x, y) = \int_x^y \frac{du}{\sqrt{u(1 - u)}}$$
   a. Effectuer dans l'intégrale $I(\alpha, \beta)$ le changement de variable
$$u = \frac{b - t}{b - a}$$
   b. Effectuer dans l'intégrale $J(x, y)$ le changement de variable
$$u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta \qquad \text{avec } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
   c. Que se passe-t-il pour $I(\alpha, \beta)$ lorsque α tend vers a et β vers b ?

[1] H. A. Rothe (1811) d'après Knuth *The Art of Computer Programming*, T1, p73