Exercice 1.

1. a. Par définition, $\sigma(A)$ est la borne inférieure d'un ensemble non vide de nombres réels. Cette définition est correcte car cet ensemble est formé de réels tous positifs ou nuls. Il est donc minoré (par 0) et, d'après les axiomes de $\mathbb{R}$, toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure. On peut déduire aussi que $0 \leq \sigma(A)$ car 0 est un minorant de A et $\inf(A)$ est le plus grand des minorants. D'autre part,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sharp\left(A \cap [\![1, n]\!]\right) \leq n \Rightarrow \frac{S_n(A)}{n} \leq 1$$
et $\sigma(A) \leq \frac{S_n(A)}{n} \Rightarrow \sigma(A) \leq 1$.

   b. Si $1 \notin A$, $\{1\} \cap A = \emptyset$ donc $S_1(A) = 0$ et $\sigma(A) \leq 0$ d'où $\sigma(A) = 0$.

   c. Supposons que $\sigma(A) = 1$. Comme $\sigma(A)$ est un minorant de l'ensemble des $\frac{S_n(A)}{n}$:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq \frac{S_n(A)}{n} \Rightarrow n \leq S_n(A)$$
Or $[\![1, n]\!] \cap A$ contient *au plus* n éléments, donc ici $[\![1, n]\!] \subset A$ pour tous les entiers n. On en déduit que $\sigma(A) = 1$ entraîne $A = \mathbb{N}$. La réciproque est évidente.

   d. Si $A \subset B$, il est clair que $S_n(A) \leq S_n(B)$ donc $\sigma(A)$ est un minorant de l'ensemble des $\frac{S_n(B)}{n}$. Or $\sigma(B)$ est le plus grand des minorants des $\frac{S_n(B)}{n}$ donc $\sigma(A) \leq \sigma(B)$.

2. a. Ici A est une partie finie, on note m son nombre d'éléments. Il est clair que $S_n(A) \leq \frac{m}{n}$. Donc, *pour tous les entiers* n, $\sigma(A) \leq \frac{m}{n}$. Par passage à la limite dans une inégalité : $\sigma(A) = 0$.

   b. Ici A est l'ensemble de tous les entiers impairs. Évaluons le nombre d'entiers impairs dans $[\![1, n]\!]$:
$$\sharp(A \cap [\![1, n]\!]) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \\ \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \Rightarrow \frac{S(n)}{n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ impair} \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$
On en déduit que $\frac{1}{2}$ est un minorant donc $\frac{1}{2} \leq \sigma(A)$ et que
$$\forall n \text{ impair },\ \frac{1}{2} \leq \sigma(A) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$$
On obtient $\sigma(A) = \frac{1}{2}$ par passage à la limite dans une inégalité.

   c. Ici $A = \{m^k, m \in \mathbb{N}\}$. Pour un entier n donné, le nombre d'entiers m tels que $m^k \leq n$ est la partie entière de $n^{\frac{1}{k}}$. On en déduit :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sigma(A) \leq \frac{S_n(A)}{n} \leq \frac{\left\lfloor n^{\frac{1}{k}} \right\rfloor}{n} \leq n^{\frac{1}{k}-1}$$
La suite à droite converge vers 0. Par passage à la limite dans une inégalité : $\sigma(A) = 0$.

3. L'ensemble C contient $S_n(B) + 1$ éléments. Le $+1$ venant de la présence de 0 qui est dans A et B. De même, l'ensemble $A \cap [\![0, n]\!]$ contient $S_n(A) + 1$ éléments. La somme des cardinaux[1] de ces deux ensembles est donc $S_n(A) + S_n(B) + 2 \geq n + 2$. Comme ces deux ensembles sont dans $[\![0, n]\!]$ qui contient $n + 1$ éléments et que la somme de leurs nombres d'élément est strictement plus grande, leur intersection est non vide. Il existe donc $a \in A \cap [\![0, n]\!]$ et $b \in B \cap [\![0, n]\!]$ tels que $a = n - b$ ce qui entraîne $n \in A + B$. Ceci est valable pour n'importe quel entier n.

4. a. Supposons $\sigma(A) + \sigma(B) \geq 1$. Alors, pour tout entier n :
$$1 \leq \sigma(A) + \sigma(B) \leq \frac{S_n(A)}{n} + \frac{S_n(B)}{n} \Rightarrow S_n(A) + S_n(B) \geq n$$
La question précédente montre alors que $n \in A + B$. Comme ceci est valable pour tous les n, on a bien $\mathbb{N} = A + B$.

   b. Il suffit d'appliquer la question précédente avec $B = A$.
On peut remarquer que l'hypothèse $0 \in A$ permet d'utiliser la question 3. Elle est indispensable à ce résultat car, si A est l'ensemble des impairs, sa densité est $\frac{1}{2}$ mais un nombre impair n'est certainement pas la somme de deux impairs.

Exercice 2.

1. Il est clair par définition que f_n est strictement croissante dans $[0, +\infty[$. Comme de plus $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = n - 1$, le théorème de la valeur intermédiaire entraîne l'existence et l'unicité de a_n tel que $f(a_n) = 0$. On peut préciser $a_1 = 1$ et $a_n \in]0, 1[$ pour $n > 0$.

2. On remarque que $f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^{n+1}$ pour tout réel x. En particulier
$$f_{n+1}(a_n) = a_n^{n+1} > 0$$

[1]le *cardinal* d'un ensemble fini est le nombre d'éléments qu'il contient.

Rémy Nicolai M1806C

Ce qui, avec la stricte croissance de f et le théorème de la valeur intermédiaire entraîne $a_{n+1} < a_n$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0. Elle converge vers un élément de $[0, a_2]$.

3. On a déja démontré en 1. que $a_2 \in]0,1[$. À cause de la décroissance, on en déduit
$$0 < a_n < a_2 \Rightarrow 0 < a_n^{n+1} < a_2^{n+1}.$$
Ceci entraîne, par le théorème d'encadrement, la convergence de $(a_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers 0. En utilisant l'expression de la somme des termes d'une suite géométrique, il vient
$$f_n(a_n) = \frac{1-a_n^{n+1}}{1-a_n} - 2 = 0 \Rightarrow 1 - a_n^{n+1} = 2 - 2a_n \Rightarrow a_n = \frac{1}{2}(1 + a_n^{n+1}).$$
On en déduit la convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $\frac{1}{2}$.

4. Comme
$$f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 2$$
Lorsque $0 < x < 1$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers
$$\frac{1}{1-x} - 2 = \frac{2x-1}{1-x}\begin{cases} > 0 \text{ si } x > \dfrac{1}{2} \\ < 0 \text{ si } x < \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$
Considérons un ε quelconque dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que
$$\frac{1}{2} + \varepsilon \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[\qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2} - \varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[.$$
Comme $(f_n(\frac{1}{2}+\varepsilon))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre strictement positif et $(f_n(\frac{1}{2}-\varepsilon))_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers un nombre strictement négatif, il existe un entier n_0 tel que,
$$\forall n > n_0 : f_n(\frac{1}{2} - \varepsilon) < 0 < f_n(\frac{1}{2} + \varepsilon) \Rightarrow \forall n > n_0 : \frac{1}{2} - \varepsilon < a_n < \frac{1}{2} + \varepsilon$$
Ce qui est exactement la définition de la convergence vers $\frac{1}{2}$.

5. On a déjà remarqué que
$$2a_n - 1 = a_n^{n+1}$$
Utilisons l'indication de l'énoncé :
$$(2a_n)^{n+1} = e^{(n+1)\ln(2a_n)}$$
avec
$$(n+1)\ln(2a_n) \sim (n+1)(2a_n - 1) \sim (n+1)a_n^{n+1}$$
De plus,
$$0 < (n+1)a_n^{n+1} < (n+1)a_2^{n+1}$$
avec $a_2 < 1$ assure que $(n+1)a_n^{n+1} \to 0$ et donc que $(2a_n)^{n+1} \to 1$.
On en déduit $a_n^{n+1} \sim \frac{1}{2^{n+1}}$ et finalement, comme $a_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a_n^{n+1}$:
$$a_n - \frac{1}{2} \sim \frac{1}{2^{n+2}}.$$