Exercice 1.

Pour toute partie [1] A de $\mathbb{N}$ et tout entier $n \geq 1$, on pose

$$S_n(A) = \operatorname{Card}(A \cap [\![1, n]\!])$$

et on appelle *densité de Schnirelmann* de A le réel

$$\sigma(A) = \inf\{\frac{S_n(A)}{n}, n \geq 1\}$$

Si A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$, on pose

$$A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$$

1. a. Justifier la définition de $\sigma(A)$ et montrer que $\sigma(A) \leq 1$.
   b. Que vaut $\sigma(A)$ si $1 \notin A$?
   c. Sous quelle condition a-t-on $\sigma(A) = 1$?
   d. Si $A \subset B$, comparer $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$.
2. Calculer $\sigma(A)$ pour les parties suivantes :
   a. A est une partie finie de $\mathbb{N}$.
   b. A est l'ensemble des entiers impairs.
   c. Soit $k \geq 2$ entier fixé et A l'ensemble des puissances k-ièmes d'entiers.
   $$A = \{m^k, m \in \mathbb{N}^*\}$$
3. Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$ contenant 0, soit $n \geq 1$ un nombre entier. En considérant
   $$C = \{n - b, b \in [\![0, n]\!] \cap B\}$$
   montrer que
   $$S_n(A) + S_n(B) \geq n \Rightarrow n \in A + B$$
4. Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$ contenant 0.
   a. Montrer que si $\sigma(A) + \sigma(B) \geq 1$ alors $A + B = \mathbb{N}$.
   b. Montrer que si $\sigma(A) \geq \frac{1}{2}$ alors tout entier est la somme de deux éléments de A.

[1] D'après le problème 1 de l'ouvrage "Problèmes choisis de mathématiques supérieure" (Springer).

Exercice 2.

On définit, pour tout entier $n \geq 1$, une fonction f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1$$

1. Montrer qu'il existe un unique réel a_n strictement positif tel que $f_n(a_n) = 0$.
2. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone, en déduire sa convergence.
3. Montrer que $a_2 \in]0, 1[$. En déduire la convergence et la limite de
   $$(a_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$$
   puis la limite l de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   On pourra montrer que $a_n = \frac{1}{2}(1 + a_n^{n+1})$.
4. Préciser, suivant $x \in]0, 1[$ et $x \neq \frac{1}{2}$, la limite de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$. En déduire directement, sans utiliser 2 la convergence et la limite l de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Pour tout $\varepsilon > 0$, on pourra considérer les suites $\left(f_n(\frac{1}{2} - \varepsilon)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(f_n(\frac{1}{2} + \varepsilon)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Trouver un équivalent simple à la suite $(a_n - l)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   On pourra étudier d'abord la limite de $((2a_n)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$.