Problème.

Partie I. La fonction.

1. Les conditions se traduisent par un système de 3 équations aux inconnues a, b, c

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ c=1 \\ a+b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a-b=-1 \\ a+b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a=-\dfrac{3}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La seule fonction polynomiale f de degré 2 vérifiant $f(-1)=0$, $f(0)=1$ et $f(1)=-1$ est donc

$$f(x)=-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$$

2. Le graphe présenté est bien celui d'une fonction du second degré (parabole) dont le coefficient de x^2 est strictement négatif. Le calcul de la dérivée permet d'obtenir m et $b=f(m)$.

$$f'(x)=-3x-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m=-\frac{1}{6} \quad \text{et} \quad b=\frac{25}{24}$$

La recherche des points fixes se fait en résolvant $f(x)-x=0$

$$f(x)-x=-\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1, \quad \Delta=\frac{33}{4} \Rightarrow$$
$$a=-\frac{\sqrt{33}+3}{6}\simeq -1.46, \quad a'=\frac{\sqrt{33}-3}{6}\simeq 0.46$$

Sur le graphe figurent aussi les trois points fondamentaux

$$(-1,0)=(-1,f(-1)), \quad (0,1)=(0,f(0)), \quad (1,-1)=(1,f(1))$$

3. La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty,a]$ et diverge vers $-\infty$ en $-\infty$ donc

$$f\left(]-\infty,a]\right)=]-\infty,f(a)]=]-\infty,a] \text{ car } a \text{ est un point fixe.}$$

La fonction est strictement croissante aussi sur $[a,m]$ donc

$$f\left([a,m]\right)=[f(a),f(m)]=[a,b] \text{ car } b=f(m).$$

La fonction est strictement décroissante sur $[m,b]$ donc

$$f\left([m,b]\right)=[f(b),f(m)]=[f(b),b]\subset[a,b] \qquad (\text{ car } a<f(b))$$

Comme $f\left([a,m]\right)$ et $f\left([m,b]\right)$ sont inclus dans $[a,b]$, le segment $[a,b]$ est stable.

4. L'intervalle $]-\infty,a]$ est stable donc la suite définie par récurrence par la condition initiale x_0 avec $x_0<a$ est bien définie et tous les x_n sont dans $]-\infty,a]$. De plus $f(x_0)<x_0$ d'après l'étude des signes et la fonction f est strictement croissante dans l'intervalle considéré. On en tire

$$x_1<x_0 \Rightarrow x_2=f(x_1)<f(x_0)=x_1\Rightarrow\cdots$$

La suite est donc décroissante et tous les x_n sont strictement plus petits que x_0 donc plus petits que a. Si la suite convergeait, comme f est continue, sa limite serait un point fixe de f strictement plus petit que a. Or il n'existe pas de tel point fixe donc la suite diverge vers $-\infty$.
Si $x_0=a$ ou a' (points fixes), la suite est constante de valeur a ou a'.
Si $x_0=-1$ ou 0 ou 1, la suite est périodique de période 3. Elle prend successivement les valeurs -1, 0, 1.

Partie II. Les outils.

1. On suppose $[u,v]\subset g([u,v])$. Comme l'énoncé nous y invite, considérons z et t dans $[u,v]$ tels que $g(z)=u$ et $g(t)=v$. Considérons aussi la fonction (évidemment continue)

$$\varphi:\begin{cases}[u,v]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto g(x)-x\end{cases}$$

Alors :

$$\varphi(z)=g(z)-z=u-z\leq 0 \text{ car } z\in[u,v]$$
$$\varphi(t)=g(t)-t=v-t\geq 0 \text{ car } t\in[u,v]$$

Si une des inégalités est une égalité, elle est associée à un point fixe. Si les deux inégalités sont strictes, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires dans l'intervalle d'extrémités z et t. Il existe c entre z et t tel que $\varphi(c)=0$ c'est à dire $g(c)=c$.

2. Comme $[v,V]\subset f(I)$, il existe a et b dans I tels que $f(a)=v$ et $f(b)=V$. On suppose dans les trois premières sous-questions que $a<b$.
   a. La partie A est non vide car elle contient a. Comme elle est par définition incluse dans $[a,b]$, elle est majorée par b. Elle admet donc (propriété fondamentale de $\mathbb{R}$) une borne supérieure notée α. De $a\in A$, on déduit $a\leq\alpha$ et de b majorant de A, on déduit $\alpha\leq b$ donc $\alpha\in[a,b]$.
   D'après le cours, α est la limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge

vers α. La suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur v (par définition de A) et elle converge vers $f(\alpha)$ car f est continue en α. On obtient donc $f(\alpha) = v$ c'est à dire $\alpha \in A$ donc $\alpha = \max A$.
Comme $\alpha = \max A$, si $x \in]\alpha, b]$ alors $x \notin A$ donc $f(x) \neq v$.
Si $f(x) < v$, on applique le théorème des valeurs intermédiaires dans $[x, b]$ et il existe $c \in]x, b[$ tel que $f(c) = v$ en contradiction avec $\alpha = \max A$. Ceci montre que $f(x) > v$.

b. On raisonne comme dans la question précédente. La partie B est non vide (car $b \in B$), minorée par α (car $B \subset [\alpha, b]$) ; elle admet donc une borne inférieure $\beta \in [\alpha, b]$. On approche β par une suite d'éléments de B, on en déduit $f(\beta) = V$ par continuité de f en β donc $\beta \in B$ et $\beta = \min B$.
Comme $\beta = \min B$, si $x \in [\alpha, \beta[$ alors $x \notin B$ donc $f(x) \neq V$.
Si $f(x) > V$, on applique le théorème des valeurs intermédiaires dans $[\alpha, x]$ et il existe $c \in]\alpha, x[$ tel que $f(c) = V$ en contradiction avec $\beta = \min B$. Ceci montre que $f(x) < V$.

c. Les implications des questions a. et b. montrent que $f([\alpha, \beta]) \subset [v, V]$. Réciproquement, pour tout $y \in]v, V[=]f(\alpha), f(\beta)[$, il existe $x \in]\alpha, \beta[$ tel que $f(x) = y$ à cause du théorème des valeurs intermédiaires.

d. Dans le cas où $b < a$, on peut se ramener au cas traité en considérant la fonction $x \mapsto f(-x)$ qui a pour effet de renverser le domaine de définition.

Partie III. Existence de suites périodiques.

1. D'après l'étude des variations de la première partie
$$f(I_-) = [0, f(m)] = [0, b]$$
Comme $1 < b$, on a bien $I_+ = [0, 1] \subset [0, b] = f(I_-)$.
Dans I_+ la fonction est décroissante
$$f(I_+) = f([0, 1]) = [f(1), f(0)] = [-1, 1] = I_- \cup I_+$$
On en déduit $I_- \subset f(I_+)$ et $I_+ \subset f(I_+)$.

2. a. Comme $I_+ \subset f(I_+)$, le résultat de la question II.2. montre qu'il existe un segment $K_1 \subset I_+$ tel que $f(K_1) = I_+$.
De même $K_1 \subset I_+$ s'écrit aussi $K_1 \subset f(K_1)$ par définition de K_1. On peut encore appliquer II.2. : il existe $K_2 \subset K_1 \subset I_+$ tel que $f(K_2) = K_1$.
Utilisons maintenant $I_+ \subset f(I_-)$, on en déduit $K_2 \subset f(I_-)$ car $K_2 \subset I_+$. Toujours d'après II.2., il existe $K_3 \subset I_-$ tel que $f(K_3) = K_2$.
Utilisons enfin $I_- \subset f(I_+)$. De $K_3 \subset I_- \subset f(I_+)$, on déduit avec II.2. qu'il existe $K_4 \subset I_+$ tel que $f(K_4) = K_3$.

   b. La segments estimés graphiquement sont présentés en figure ??. Ils sont légèrement décalés verticalement de l'axe des abscisses pour être mieux visibles.

3. Par construction des segments $f(K_1) = I_+$, $f(K_2) = K_1$, $f(K_3) = K_2$ et $f(K_4) = K_3$. On en déduit $f^4(K_4) = I_+$ donc
$$K_4 \subset f^4(K_4)$$
car $K_4 \subset I_+$. On peut appliquer la question II.1. avec la fonction continue $g = f^4$. Il existe donc un $c \in K_4$ tel que $f^4(c) = c$.

4. D'après la définition des segments :
$$(c \in K_4 \Rightarrow c \in I_+), \quad (f(c) \in f(K_4) = K_3 \Rightarrow f(c) \in I_-),$$
$$\left(f^2(c) \in f(K_3) = K_2 \Rightarrow f^2(c) \in I_+\right),$$
$$\left(f^3(c) \in f(K_2) = K_1 \Rightarrow f^3(c) \in I_+\right)$$
Si $c = f(c)$ alors ce nombre est dans $I_+ \cap I_-$ donc $c = 0$ ce qui est impossible car $f(0) = 1$.
Si $c = f^2(c)$ alors $f(c) = f^3(c)$ donc ce nombre est dans $I_+ \cap I_-$ donc $f(c) = 0$ ce qui est impossible car $f^3(c) = f^2(0) = -1$.
De même $c = f^3(c)$ est impossible car cela entraine $f(c) = f^4(c) = c$ déjà traité. On en conclut que c répond bien à la question. La suite définie par récurrence à partir de c est périodique de plus petite période 4.

5. Comme $I_+ \subset f(I_-)$, d'après II.2., il existe $J_1 \subset I_-$ tel que $f(J_1) = I_+$. Comme $I_- \subset f(I_+)$, il existe $J_2 \subset I_+$ tel que $f(J_2) = J_1$. On a donc $f^2(J_2) = I_+$ puis $J_2 \subset f^2(J_2)$. On peut appliquer II.1. à f^2 et en déduire l'existence d'un point fixe $c_2 \in J_2 \subset I_+$ de f^2. Comme $f(c_2) \in J_1 \subset I_-$, $f(c_2) = c_2$ impliquerait $c_2 = 0$ ce qui est absurde.

6. On peut supposer $n \geq 5$ car les cas $n = 2$ et 4 ont été traités et 0 est de période 3 par

définition. On utilise la même méthode que pour 4 et reprenant les mêmes notations.

$$\begin{aligned}
I_+ \subset f(I_+) &\Rightarrow \exists K_1 \subset I_+ \text{ tq } f(K_1) = I_+ \\
K_1 \subset I_+ = f(K_1) &\Rightarrow \exists K_2 \subset K_1 \text{ tq } f(K_2) = K_1 \\
K_2 \subset K_1 = f(K_2) &\Rightarrow \exists K_3 \subset K_2 \text{ tq } f(K_3) = K_2 \\
&\cdots \\
K_{n-3} \subset K_{n-4} = f(K_{n-3}) &\Rightarrow \exists K_{n-2} \subset K_{n-3} \text{ tq } f(K_{n-2}) = K_{n-3} \\
K_{n-2} \subset I_+ = f(I_-) &\Rightarrow \exists K_{n-1} \subset I_- \text{ tq } f(K_{n-1}) = K_{n-2} \\
K_{n-1} \subset I_- = f(I_+) &\Rightarrow \exists K_n \subset I_+ \text{ tq } f(K_n) = K_{n-1}
\end{aligned}$$

On a fabriqué ainsi un segment $K_n \subset I_+$ tel que $f^n(K_n) = I_+$ donc $K_n \subset f^n(K_n)$ donc (II.1. appliqué à f^n dans K_n) il existe $c_n \in K_n$ tel que $f^n(c_n) = c_n$.
Il reste à montrer que

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ f^k(c_n) \neq c_n$$

Remarquons que $c_n \in K_n \subset I_+$, $f(c_n) \in K_{n-1} \subset I_-$ et pour tous les $k \geq 2$, $f^k(c_n) \in I_+$. Autrement dit, tous les $f^k(c_n)$ sont dans I_+ sauf $f(c_n)$ qui est dans I_- et on a déjà utilisé que l'intersection des deux intervalles se réduit à 0.
Si $f^{n-1}(c_n) = c_n$, en composant par f, on obtient $c_n = f(c_n)$ donc égal à 0 ce qui est impossible. Supposons $k \in [\![1, n-2]\!]$ et $f^{k+1}(c_n) = f(c_n)$. On obtient une contradiction car l'un est dans I_+ et l'autre dans I_-. La plus petite période est donc bien n.

$$c_n = f^n(c_n) = f^{n-k}(c_n)$$

Exercice.

1. Le développement de l'exponentielle est usuel :

$$e^{\lambda x} = 1 + \lambda x + \frac{\lambda^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\lambda^m}{m!}x^m + o(x^m)$$

2. Comme $e^x - 1 \sim x$ et que l'on peut élever une équivalence à la puissance fixée m,

$$(e^x - 1)^m \sim x^m \Leftrightarrow (e^x - 1)^m = x^m + o(x^m)$$

3. On peut commencer par utiliser la formule du binôme avant de faire un développement limité de chaque exponentielle de la somme. On regroupe ensuite les termes avec le même exposant, on regroupe aussi les m termes $o(x^m)$ dans un seul.

$$\begin{aligned}
(e^x-1)^m &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}e^{kx} = (-1)^m + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}e^{kx} \\
&= (-1)^m + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}\left(1 + \sum_{j=1}^{m}\frac{k^j}{j!} + o(x^m)\right) \\
&= \underbrace{(-1)^m + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}}_{=\lambda_0} + \sum_{j=1}^{m}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}k^j}_{=\lambda_j}\right)\frac{x^j}{j!} + o(x^m)
\end{aligned}$$

On a obtenu ainsi un autre développement limité

$$(e^x - 1)^m = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{1!}x + \cdots + \frac{\lambda_m}{m!}x^m + o(x^m)$$

Pour j entre 1 et m, les λ_j sont exactement les sommes que l'énoncé nous demande d'évaluer. Comme une fonction admet un unique développement limité, on peut identifier les coefficients, on en tire

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j < m \\ m! & \text{si } j = m \end{cases}$$

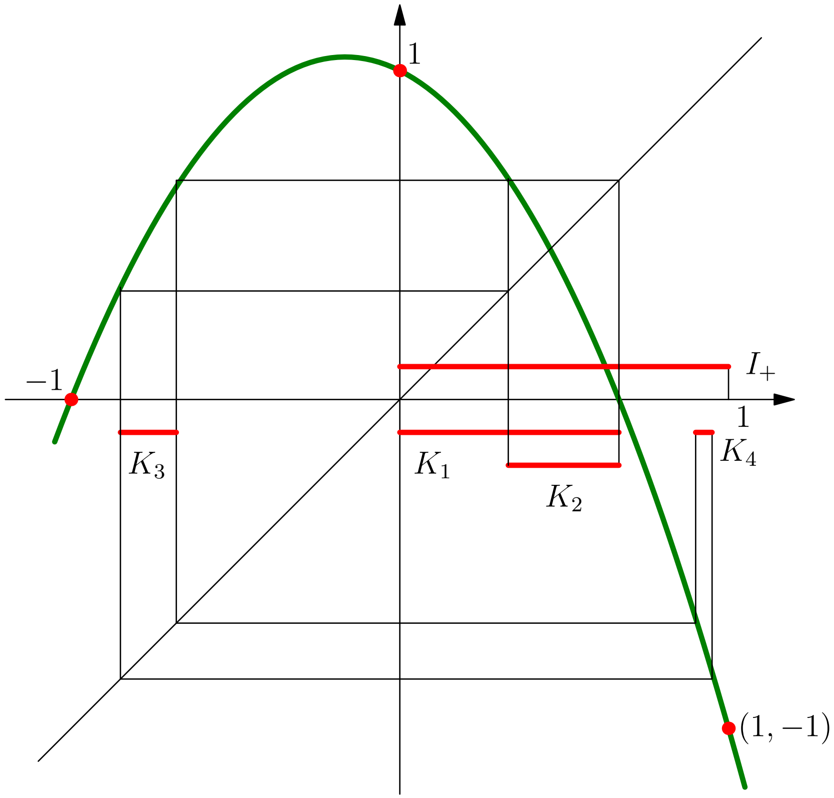

FIG. 1: Segments K_1, K_2, K_3, K_4