Problème.

Ce problème illustre la complexité du comportement des suites définies par récurrence dans le cas où la fonction n'est pas monotone. Il introduit à un résultat connu comme

« Période 3 implique chaos. »

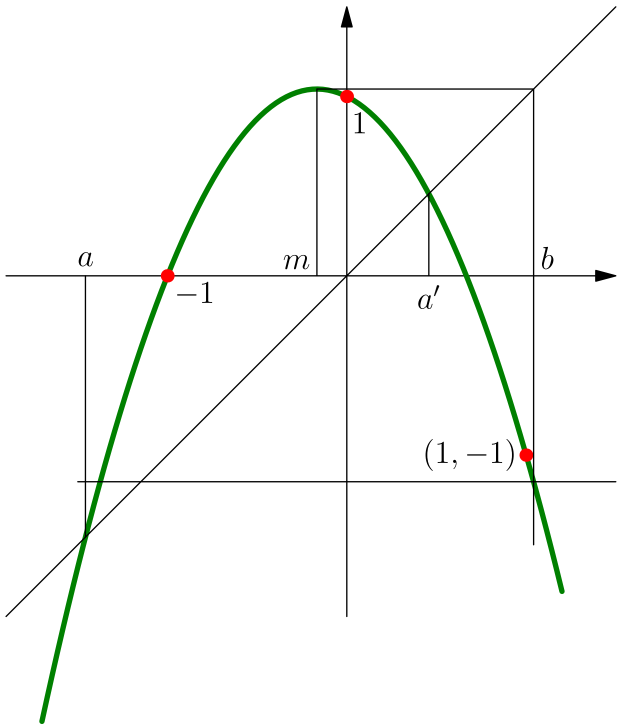

Fig. 1: Graphe de f

Partie I. La fonction.

1. Déterminer les réels a, b, c tels que la fonction polynomiale f définie par
$$\forall x \in \mathbb{R},\; f(x) = ax^2 + bx + c$$
vérifie $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$.
2. Justifier avec un tableau de variations que le graphe présenté en figure **??** est celui de f. Préciser les valeurs de a, m, a', b. On ne demande pas de vérifier les inégalités suivantes visibles sur le graphe mais on pourra les utiliser dans la suite.
$$f(x) - x \begin{cases} < 0 \text{ si } x \notin [a, a'] \\ > 0 \text{ si } x \in]a, a'[\end{cases}, \qquad a < f(b) < -1 < m < 0 < a' < 1 < b$$
3. Avec des éléments de la chaîne d'inégalités du dessus, exprimer
$$f(]-\infty, a]), \qquad f([a, m]), \qquad f([m, b]).$$
En déduire $f([a, b]) \subset [a, b]$.
4. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$x_0 \in \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\; x_{n+1} = f(x_n)$$
Étudier cette suite dans les cas suivants
$$x_0 < a, \qquad x_0 = a, \qquad x_0 = -1, \qquad x_0 = 0, \qquad x_0 = a', \qquad x_0 = 1.$$

Partie II. Les outils.

1. Pour $u < v$ réels, soit $J = [u, v]$ et $g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ telle que $J \subset g(J)$. Montrer que g admet un point fixe dans J c'est à dire qu'il existe $x \in J$ tel que $g(x) = x$ (on pourra considérer z et t dans J tels que $g(z) = u$ et $g(t) = v$).
2. Soit I un segment de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $K = [v, V] \subset f(I)$ avec $v < V$. On veut montrer qu'il existe α et β dans I tels que $K = f([\alpha, \beta])$.
Comme $[v, V] \subset f(I)$, il existe a et b dans I tels que $v = f(a)$ et $V = f(b)$. On suppose $a < b$ dans les questions a., b., c..
   a. Soit $A = \{x \in [a, b] \text{ tq } f(x) = v\}$. Montrer que A admet un plus grand élément (noté α). Montrer que $\alpha < b$ et que
   $$\alpha < x \leq b \Rightarrow v < f(x)$$
   b. Soit $B = \{x \in [\alpha, b] \text{ tq } f(x) = V\}$. Montrer que B admet un plus petit élément (noté β). Montrer que $\alpha < \beta$ et que
   $$\alpha \leq x < \beta \Rightarrow f(x) < V$$
   c. Montrer que $[v, V] = f([\alpha, \beta])$.
   d. Comment faire dans le cas $b < a$?

Rémy Nicolai M1807E

Partie III. Existence de suites périodiques.

On se replace dans le contexte de la première partie en notant $I_- = [-1, 0]$ et $I_+ = [0, 1]$. On veut montrer qu'il existe un $c \in I_+$ tel que

$$f \circ f \circ f \circ f(c) = c \text{ avec } f(c) \neq c,\ f \circ f(c) \neq c,\ f \circ f \circ f(c) \neq c$$

On pourra noter $f^i = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{i \text{ fois}}$.

1. Préciser $f(I_-)$ et $f(I_+)$ avec a, $f(b)$, m, a' et b. En déduire
$$I_+ \subset f(I_-), \qquad I_- \subset f(I_+), \qquad I_+ \subset f(I_+)$$
2. a. Montrer qu'il existe des segments K_1, K_2, K_3, K_4 tels que
$$(K_1 \subset I_+ \text{ et } f(K_1) = I_+), \qquad (K_2 \subset K_1 \subset I_+ \text{ et } f(K_2) = K_1),$$
$$(K_3 \subset I_- \text{ et } f(K_3) = K_2), \qquad (K_4 \subset I_+ \text{ et } f(K_4) = K_3)$$
   b. Reproduire sur votre copie la figure **??** et présenter les segments K_1, K_2, K_3, K_4 estimés graphiquement.
3. Montrer qu'il existe $c \in K_4$ tel que $f^4(c) = c$.
4. Pour le c défini dans la question précédente, montrer que
$$(c = f(c) \Rightarrow c = 0), \qquad (c = f \circ f(c) \Rightarrow f(c) = 0), \qquad \left(c = f^3(c) \Rightarrow c = 0\right)$$
   Conclure.
5. Montrer qu'il existe $c_2 \in I_+$ tel que $f(c_2) \neq c_2$ et $f \circ f(c_2) = c_2$.
6. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, il existe $c_n \in I_+$ tel que la suite définie par récurrence avec la condition initiale c_n soit périodique de plus petite période n.

Exercice.

[1] Soit m un entier supérieur ou égal à 1. Tous les développements limités se font en 0.

1. Soit λ un réel non nul. Écrire le développement limité à l'ordre m en 0 de la fonction
$$x \to e^{\lambda x}$$
2. Écrire le développement limité très simple à l'ordre m en 0 de la fonction
$$x \to (e^x - 1)^m$$
3. Donner une autre expression du développement limité de la fonction
$$x \to (e^x - 1)^m$$
   En déduire, pour les entiers j entre 1 et m, la valeur de
$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^j$$

[1] D'après Concours Commun Centrale Supelec 2000 PC épreuve 1

Rémy Nicolai M1807E