Problème.

1. L'ensemble E contient 1, il est clairement stable pour l'addition et la symétrisation. Comme
$$(a+b\sqrt{2})(a'+b'\sqrt{2}) = aa'+2bb'+(ab'+ba')\sqrt{2}$$
l'ensemble E est aussi stable pour la multiplication. Le seul point qui mérite d'être détaillé est la stabilité pour l'inversion.
Lorsque $x = a+b\sqrt{2}$ n'est pas nul, a^2-2b^2 est un rationnel. Ce rationnel est non nul car $\sqrt{2}$ est irrationnel. L'inverse de x est bien dans F car il s'obtient à l'aide de la quantité conjuguée soit
$$x^{-1} = \underbrace{\frac{a}{a^2-2b^2}}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{\frac{(-b)}{a^2-2b^2}}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{2}.$$

2. a. Si un même $z\in F$ admet deux écritures distinctes, il existe des nombres rationnels a, b, c, d tels que
$$a+b\sqrt{2}+cj+dj\sqrt{2}=0 \Rightarrow \begin{cases} a+b\sqrt{2}=0 \\ c+d\sqrt{2}=0 \end{cases} \text{car } j \text{ n'est pas réel}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a=b=0 \\ c=d=0 \end{cases} \text{car } \sqrt{2} \text{ est irrationnel}$$

   b. Les stabilités pour l'addition et la symétrisation sont évidentes. Pour la multiplication, la stabilité résulte du calcul explicite du produit.
$$z = a+b\sqrt{2}+cj+dj\sqrt{2}, \qquad z' = a'+b'\sqrt{2}+c'j+d'j\sqrt{2}$$
$$zz' = (\underbrace{aa'+2bb'-cc'-2dd'}_{A(z,z')\in\mathbb{Q}}) + (\underbrace{ab'+ba'-cd'-dc'}_{B(z,z')\in\mathbb{Q}})\sqrt{2}$$
$$+(\underbrace{ac'+2bd'+ca'-cc'+2db'-2dd'}_{C(z,z')\in\mathbb{Q}})j+(\underbrace{ad'+bc'-cd'+cb'+da'-dc'}_{D(z,z')\in\mathbb{Q}})j\sqrt{2}$$
Le seul point délicat est encore la stabilité pour l'inversion. Il ne faut surtout pas chercher à expliciter l'inverse d'un élément non nul quelconque
$$z = a+b\sqrt{2}+cj+cj\sqrt{2}\in F.$$
On va seulement montrer qu'il est dans F en utilisant les stabilités déjà à notre disposition. Remarquons d'abord que F contient E et $\overline{z}$ car $\overline{j}=-1-j$. Ensuite
$$|z|^2 = (\underbrace{a+b\sqrt{2}-\frac{c}{2}-\frac{d}{2}\sqrt{2}}_{\in E})^2 + \frac{3}{4}(\underbrace{c+d\sqrt{2}}_{\in E})^2$$
ceci montre que $|z|^2\in E\subset F$ donc son inverse aussi. On conclut en écrivant
$$z^{-1} = \left(|z|^2\right)^{-1}\overline{z}.$$

   c. Le nombre à inverser se factorise ce qui facilite le calcul :
$$z = 1+\sqrt{2}+j+j\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})(1+j) = -(1+\sqrt{2})\overline{j}$$
$$\Rightarrow z^{-1} = -(-1+\sqrt{2})j = j-j\sqrt{2}$$

3. On doit vérifier :
   - Pour tout f et g dans $G_A(B)$, $f\circ g\in G_A(B)$ c'est à dire :
     - $\forall a\in A : f\circ g(a) = a$.
     - $\forall (b,b')\in B^2 : f\circ g(b+b') = f\circ g(b)+f\circ g(b'), f\circ g(bb') = f\circ g(b)\, f\circ g(b')$
   - Pour tout f dans $G_A(B)$, la bijection réciproque $f^{-1}\in G_A(B)$ c'est à dire :
     - $\forall a\in A : f^{-1}\circ g(a) = a$.
     - $\forall (b,b')\in B^2 : f^{-1}(b+b') = f^{-1}(b)+f^{-1}(b'), f^{-1}(bb') = f^{-1}(b)\, f^{-1}(b')$

   Toutes ces relations sont immédiates à partir des définitions sauf les dernières pour lesquelles la bijectivité est capitale
$$f(f^{-1}(b)+f^{-1}(b')) = f(f^{-1}(b))+f(f^{-1}(b)) \text{ car } f \text{ est un morphisme}$$
$$= b+b' = f(f^{-1}(b+b')) \text{ par définition de la bijection réciproque}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(b)+f^{-1}(b') = f^{-1}(b+b') \text{ par définition de la bijection réciproque}$$
   Le raisonnement est le même pour le produit.

4. Comme f est un automorphisme qui laisse les rationnels invariants,
$$0 = f(0) = f((\sqrt{2})^2-2) = \left(f(\sqrt{2})\right)^2 - 2$$
donc $f(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$. De même $1+f(j)+f(j)^2=0$ donc $f(j)\in\{j,j^2\} = \{j,-1-j\}$.
Lorsque $f(\sqrt{2})$ et $f(j)$ sont fixés, l'image d'un autre $z = a+b\sqrt{2}+cj+cj\sqrt{2}\in F$ est fixée avec
$$f(z) = a+bf(\sqrt{2})+cf(j)+cf(j)f(\sqrt{2})$$

à cause des propriétés d'automorphisme de f. On en déduit que $G_{\mathbb{Q}}(F)$ contient au plus 4 éléments.
Vérifions que les quatre couples d'images possibles correspondent effectivement à des automorphismes.

- Cas $\sqrt{2} \to \sqrt{2}$, $j \to j$. Cela correspond évidemment à un automorphisme : l'identité de F. On le note id.
- Cas $\sqrt{2} \to \sqrt{2}$, $j \to -1-j$. Cela correspond à un automorphisme : la restriction à F de la conjugaison complexe. On le note c.
- Cas $\sqrt{2} \to -\sqrt{2}$, $j \to j$. Définissons l'application c' par

$$z = a + b\sqrt{2} + cj + cj\sqrt{2} \to c'(z) = z = a - b\sqrt{2} + cj + cj\sqrt{2}$$

  Cette fonction conserve clairement l'addition mais ce n'est pas évident pour la multiplication. Cela résulte des formules de la question 1. Prendre l'image par c', c'est remplacer b par $-b$ et d par $-d$, on en déduit :

$$\begin{cases} A(c'(z), c'(z')) = A(z, z') \\ B(c'(z), c'(z')) = -B(z, z') \\ C(c'(z), c'(z')) = C(z, z') \\ D(c'(z), c'(z')) = -D(z, z') \end{cases} \Rightarrow c'(zz') = c'(z)c'(z')$$

- Cas $\sqrt{2} \to -\sqrt{2}$, $j \to -1-j$. Il est réalisé par $c \circ c'$.

On en déduit donc finalement :

$$G_{\mathbb{Q}}(F) = \{id, c, c', c \circ c'\}$$

Tout f de $G_E(F)$ est un morphisme de F qui laisse E invariant, il laisse donc $\mathbb{Q}$ invariant donc $G_E(F) \subset G_{\mathbb{Q}}(F)$. Parmi les quatre éléments de $G_{\mathbb{Q}}(F)$, seuls id et c laissent E invariant. On a donc :

$$G_E(F) = \{id, c\}.$$

Exercice.

1. Entre deux zéros consécutifs de f, on peut appliquer le théorème de Rolle. On obtient ainsi $n-1$ zéros pour f'. Ils sont distincts car ils appartiennent à des intervalles ouverts disjoints. On applique encore $n-1$ fois le théorème de Rolle entre les zéros consécutifs de f' et on obtient $n-2$ zéros distincts. On continue de même, le nombre de zéros diminuant de 1 à chaque dérivation.
   Pour $f^{(n-1)}$ il ne reste plus que deux zéros et on applique une dernière fois le théorème de Rolle entre eux ce qui prouve l'existence d'un zéro pour $f^{(n)}$.
2. Pour chaque $x \in I \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}$, considérons la fonction

$$\varphi_x : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ t \to (t-a_1)\cdots(t-a_n)K_x - f(t) \end{cases}$$

   où K_x est un réel choisi pour que $\varphi_x(x) = 0$. On a donc :

$$f(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_n)K_x$$

   La fonction φ_x est $\mathcal{C}^\infty$ comme f et s'annule $n+1$ fois : en chacun des a_i et en x. On peut donc lui appliquer le résultat de la question 1.
   Il existe $c_x \in I$ tel que $\varphi^{(n)}(c_x) = 0$. Or dans la dérivée d'ordre n de la partie polynomiale (de degré n) ne subsiste que le terme constant. On en tire

$$\varphi_x^{(n)}(t) = n!K_x - f^{(n)}(t)$$

   On déduit alors :

$$\varphi^{(n)}(c_x) = 0 \Rightarrow K_x = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} \Rightarrow f(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_n)\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}$$
$$\Rightarrow |f(x)| \leq (x-a_1)\cdots(x-a_n)\frac{|M_n|}{n!}$$

   Cette inégalité est vraie pour tous les x autres que les a_i, elle est aussi valable aux a_i puisque ce sont des zéros de f.
3. On reconnait dans les L_i de l'énoncé les *polynômes d'interpolation de Lagrange*. On vérifie immédiatement qu'ils sont tous de degré $n-1$ avec

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}, \ \widetilde{L_i}(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

   Définissons un polynôme P par : $P = \sum_{i=1}^n f(a_i)L_i$.
   D'après les propriétés des polynômes d'interpolation signalées au début, ce polynôme P est de degré inférieur ou égal à $n-1$ et $\widetilde{P}(a_j) = f(a_j)$ pour tout j. En effet, le seul i de la somme qui contribue réellement est $i = j$ car $\widetilde{L_i}(a_j)$ est nul pour les autres j. D'autre part, sa contribution est exactement $f(a_j)$ car $\widetilde{L_j}(a_j) = 1$.
   Supposons qu'il existe un autre polynôme Q vérifiant les mêmes propriétés.

Les polynômes P et Q prennent les mêmes valeurs aux a_i. Le polynôme $P - Q$ admet donc au moins n racines à savoir tous les a_i. Or ce polynôme est, par hypothèse, de degré inférieur ou égal à $n - 1$, il doit donc être nul ce qui assure l'unicité.
L'application $\varphi = f - P$ vérifie les hypothèses de la fonction f de la question 2 avec le même majorant M_n car la dérivée n-ième de P est nulle. On obtient donc l'inégalité demandée.