Problème.

Dans cet exercice, il sera utile de considérer diverses quantités conjuguées ainsi que des modules de nombres complexes. On utilisera librement le fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

On dira qu'une partie non vide F de $\mathbb{C}$ est un *sous-corps de* $\mathbb{C}$ si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\forall (x,y)\in F^2 : x+y\in F, \qquad xy\in F$$
$$\forall x\in F : -x\in F$$
$$\forall x\in F\setminus\{0\} : \frac{1}{x}\in F$$

Si F est un sous-corps de $\mathbb{C}$, on dira qu'une partie A de $\mathbb{C}$ est un sous-corps de F si et seulement si A et un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $A\subset F$.

Si B est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et A un sous-corps de B, on désigne par $G_A(B)$ l'ensemble des bijections f de B dans lui même vérifiant :

$$\forall a\in A : f(a)=a$$
$$\forall (b,b')\in B : f(b+b')=f(b)+f(b'), \qquad f(bb')=f(b)f(b')$$

1. Montrer que l'ensemble
$$E=\left\{a+b\sqrt{2}, (a,b)\in\mathbb{Q}^2\right\}$$
est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
2. On définit une partie F de $\mathbb{C}$ par :
$$F=\left\{a+b\sqrt{2}+cj+dj\sqrt{2}, (a,b,c,d)\in\mathbb{Q}^4\right\}$$
avec $j=e^{2i\pi/3}$.
   a. Montrer que pour tout $z\in F$, il existe un *unique* quadruplet $(a,b,c,d)\in\mathbb{Q}^4$ tel que
   $$z=a+b\sqrt{2}+cj+dj\sqrt{2}$$
   b. Montrer que F est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Soit z et z' deux éléments de F, préciser les coefficients $A(z,z')$, $B(z,z')$, $C(z,z')$, $D(z,z')$ tels que
   $$zz'=A(z,z')+B(z,z')\sqrt{2}+C(z,z')j+D(z,z')j\sqrt{2}$$
   c. Préciser l'inverse de $1+\sqrt{2}+j+j\sqrt{2}$
3. Soit A un sous-corps de B. Montrer que $G_A(B)$ est un sous-groupe du groupe des bijections de B dans B pour la composition des applications.
4. Soit f un élément de $G_{\mathbb{Q}}(F)$.
Quelles valeurs peuvent prendre $f(\sqrt{2})$ et $f(j)$? Montrer que tout élément f de $G_{\mathbb{Q}}(F)$ est déterminé par la donnée de $f(\sqrt{2})$ et $f(j)$. En déduire les éléments de $G_{\mathbb{Q}}(F)$ puis de $G_E(F)$.

Exercice.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel non nul. On appelle *zéro* d'une fonction définie dans I un élément de I en lequel la fonction prend la valeur nulle.

1. Soit $f\in\mathcal{C}^\infty(I)$ admettant $n+1$ zéros distincts. Montrer que $f^{(n)}$ admet un zéro.
2. Soit $f\in\mathcal{C}^\infty(I)$ telle que $f^{(n)}$ soit bornée avec $\sup_I|f^{(n)}|=M_n$ et admettant n zéros distincts $a_1,a_2,\cdots,a_n$. Montrer que :
$$\forall x\in I : |f(x)|\leq |x-a_1|\cdots|x-a_n|\frac{M_n}{n!}$$
On pourra considérer *des* fonctions
$$\varphi_x : \qquad t\to (t-a_1)\cdots(t-a_n)K_x-f(t)$$
avec $x\in I$ et K_x réel.
3. Soit $f\in\mathcal{C}^\infty(I)$ telle que $f^{(n)}$ soit bornée avec $\sup_I|f^{(n)}|=M_n$. Soit $a_1,a_2,\cdots,a_n$ des éléments deux à deux distincts dans I. Pour i entre 1 et n, on note
$$L_i=\prod_{j\in\{1,\cdots,n\}\setminus\{i\}}\frac{X-a_j}{a_i-a_j}$$
Montrer qu'il existe un unique polynôme $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que
$$\forall i\in\{1,\cdots,n\}, \qquad \widetilde{P}(a_i)=f(a_i)$$
Montrer que
$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad \left|\widetilde{P}(x)-f(x)\right|\leq |x-a_1|\cdots|x-a_n|\frac{M_n}{n!}$$

Rémy Nicolai M1808E