Ce problème porte sur un critère d'irréductibilité pour les polynômes à coefficients rationnels.

Partie 1 : Contenu d'un polynôme à coefficients entiers

On note $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ à coefficients entiers. Étant donné un polynôme $P = a_0 + ... + a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ non nul, on pose :

$$c(P) = \text{pgcd}(a_0, ..., a_n).$$

On dit que $c(P)$ est le *contenu* de P.

1. a. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$ non nul et tout $k \in \mathbb{N}^*$, $c(kP) = kc(P)$.
   b. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$ non nul :
   $$\frac{1}{c(P)} P \in \mathbb{Z}[X]$$

   Dans la suite de cette partie, A et B désignent deux polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ de degrés respectifs n et m :
   $$A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k \qquad \text{notons } AB = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$$
2. Pour tout $k \in [\![0, n+m]\!]$, rappeler l'expression de c_k en fonction des a_i, b_j.
3. On suppose dans cette question que $c(A) = c(B) = 1$ et que $c(AB)$ admet un diviseur premier p.
   a. Justifier que l'on puisse définir des entiers k_0 dans $[\![0, n]\!]$ et l_0 dans $[\![0, m]\!]$ par les égalités :
   $$k_0 = \min\{k \in [\![0, n]\!] \text{ tq } p \nmid a_k\} \qquad l_0 = \min\{l \in [\![0, m]\!] \text{ tq } p \nmid b_l\}$$
   b. En exprimant $c_{k_0+l_0}$, montrer que p divise $a_{k_0} b_{l_0}$.
   c. Montrer que $c(AB) = 1$.
4. Montrer que $c(AB) = c(A)c(B)$.
5. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ qui n'est pas irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, c'est à dire qu'il existe deux polynômes $Q, R \in \mathbb{Q}[X]$ de degrés supérieurs ou égaux à 1 tels que $P = QR$.
   a. Montrer qu'il existe deux entiers naturels q, r tels que $qQ \in \mathbb{Z}[X]$ et $rR \in \mathbb{Z}[X]$.
   b. Montrer que qr divise $c(qrQR)$.
   c. En déduire qu'il existe deux polynômes S et T dans $\mathbb{Z}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 et tels que $P = ST$.

Partie 2 : Critère d'Eisenstein

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier premier. On considère un polynôme A de degré n :

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$$

et on suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$p \text{ divise } a_0, ..., a_{n-1}. \quad p \text{ ne divise pas } a_n. \quad p^2 \text{ ne divise pas } a_0.$$

1. Supposons qu'il existe deux polynômes $B, C \in \mathbb{Z}[X]$ tels que :
   $$\deg(B) = r \geq 1,\ B = \sum_{k=0}^{r} b_k X^k, \qquad \deg(B) = s \geq 1,\ C = \sum_{k=0}^{s} c_k X^k \text{ et } A = BC.$$
   a. Montrer que p divise un et un seul des deux entiers b_0 et c_0.
   On supposera par la suite que p divise b_0 et ne divise pas c_0.
   b. Montrer que pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, p divise b_k.
   c. En déduire que p divise a_n. Qu'en conclure ?
2. Montrer que A est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Partie 3 : Exemples

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $X^n - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
2. Soit p un entier premier. Posons $\Phi_p = 1 + X + ... + X^{p-1}$.
   a. Montrer que $(X-1)\Phi_p = X^p - 1$.
   b. Posons $\Psi_p = \widehat{\Phi_p}(X+1)$. Montrer que :
   $$\Psi_p = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k+1} X^k.$$
   c. En déduire que Ψ_p est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
   d. Montrer que Φ_p est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Rémy Nicolai M1809E