L'objet de ce problème est le théorème de Mason - Stothers et son application au grand théorème de Fermat pour les polynômes.
Soit A, B, C trois polynômes non nuls à coefficients complexes tels que $A+B=C$. On suppose A et B premiers entre eux et de degré supérieur ou égal à 1.
On introduit les notations suivantes pour désigner les racines *distinctes* de ces polynômes, leurs multiplicités et leurs coefficients dominants.

$$A=\lambda_A\prod_{i=1}^{n_A}(X-a_i)^{\alpha_i},\qquad B=\lambda_B\prod_{i=1}^{n_B}(X-b_i)^{\beta_i},\qquad C=\lambda_C\prod_{i=1}^{n_C}(X-c_i)^{\gamma_i}.$$

On note $m=n_A+n_B+n_C$, on introduit le polynôme

$$M=\left(\prod_{i=1}^{n_A}(X-a_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{n_B}(X-b_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{n_C}(X-c_i)\right)$$

et les *fractions rationnelles* à coefficients complexes $F=\frac{A}{C}$, $G=\frac{B}{C}$.

1. Question préliminaire. Soit n naturel non nul et $F_1,F_2,\cdots,F_n$ des fractions rationnelles à coefficients complexes. Montrer que
$$(F_1F_2\cdots F_n)'=\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j\in\{1,\cdots,n\}\setminus\{i\}}F_j\right)F_i'.$$
2. Montrer que C est premier avec A et B. En déduire une propriété des ensembles de racines
$$\{a_1,a_2,\cdots,a_{n_A}\},\qquad\{b_1,b_2,\cdots,b_{n_B}\},\qquad\{c_1,c_2,\cdots,c_{n_C}\}.$$
Comparer m, $\deg(M)$, $\deg(ABC)$.
3. a. En utilisant la question préliminaire, former les décompositions en éléments simples de $\frac{F'}{F}$ et $\frac{G'}{G}$.
   b. Montrer que $M\frac{F'}{F}$ et $M\frac{G'}{G}$ sont deux *polynômes* à coefficients complexes de degré strictement plus petit que m. On note
$$U=M\frac{F'}{F}\in\mathbb{C}[X],\qquad V=M\frac{G'}{G}\in\mathbb{C}[X].$$
4. Montrer que $AU+BV=0$.
5. Théorème de Mason - Stothers.
Montrer que les degrés des polynômes A, B, C sont strictement plus petits que m.
6. Grand théorème de Fermat pour les polynômes.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et P, Q, R des polynômes à coefficients complexes tels que
$$P\wedge Q=1,\qquad P^n+Q^n=R^n.$$
Montrer que
$$n\deg(PQR)\leq 3\deg(PQR)-3.$$
En déduire que n ne peut être que 1 ou 2.

Cette création est mise à disposition selon le Contrat
Paternité-Partage des Conditions Initiales à l'Identique 2.0 France
disponible en ligne http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/

Rémy Nicolai M1810E