Problème

Partie I

1. On transforme la matrice $A - \lambda I_3$ par opérations élémentaires. Le rang se conserve.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-(2-\lambda)^2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

On en déduit que le rang est 3 sauf pour les valeurs de λ qui annulent un des termes diagonaux. Pour $\lambda \in \{1, 2, 3\}$ le rang est 2.

2. On résoud trois systèmes de trois équations à trois inconnues. On trouve

$$e_1 = (-1, 1, 0), \qquad e_2 = (1, 1, -1), \qquad e_3 = (1, 1, 0).$$

D'après le calcul de rang de la première question,

$$\dim(\ker(u - i\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})) = 1 \Rightarrow \ker(u - i\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \operatorname{Vect}(e_i).$$

3. Pour montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base, il suffit de montrer que la famille est libre. Calculons pour cela le rang de leur matrice ($\mathcal{C}$ désigne la base canonique) :

$$\operatorname{rg}(e_1, e_2, e_3) = \operatorname{rg}\left(\operatorname*{Mat}_{\mathcal{C}} \mathcal{B}\right) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3.$$

Notons $P = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{C}} \mathcal{B}$ la matrice de passage. La formule de changement de base donne

$$\Delta = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} u = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ par définition des vecteurs } e_i.$$

4. a. La relation $B^2 = A$ entre des matrices d'endomorphismes dans les mêmes bases traduit l'égalité $v^2 = u$ entre les endomorphismes. De plus, $u \circ v = v^3 = v \circ u$.

b. Pour chaque i entre 1 et 3 :

$$u(v(e_i)) = v(u(e_i)) = iv(e_i) \Rightarrow v(e_i) \in \ker(u - iId_{\mathbb{R}^3}) = \operatorname{Vect}(e_i).$$

c. Comme $v(e_i) \in \operatorname{Vect}(e_i)$, il existe donc un réel λ_i tel que $v(e_i) = \lambda_i e_i$. Ainsi, la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} v = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

De plus $v^2 = u$ se traduit par $D^2 = \Delta$ donc

$$\lambda_i \in \{-\sqrt{i}, \sqrt{i}\}.$$

Les solutions matricielles de l'équation $X^2 = A$ sont donc les huit matrices

$$P\begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3\sqrt{3} \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } \epsilon_i \in \{-1, +1\}.$$

On peut préciser ces matrices en calculant P^{-1}. On utilise la méthode du pivot partiel étendu pour transformer la copie de A placée à gauche en I_3.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Les solutions sont les

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_3\sqrt{3}) & \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_3\sqrt{3}) & -\epsilon_2\sqrt{2} + \epsilon_3\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_3\sqrt{3}) & \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_3\sqrt{3}) & -\epsilon_2\sqrt{2} + \epsilon_3\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \epsilon_2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \epsilon_i \in \{-1, +1\}.$$

Partie II

1. Comme $u \circ u$ est l'endomorphisme nul, $\operatorname{Im} u \subset \ker u$ d'où

$$\operatorname{rg}(u) \leq \dim(\ker u).$$

Or d'après le théorème du rang, la somme des deux vaut $\dim E$ donc

$$2\operatorname{rg}(u) \leq n = \dim E.$$

2. Notons r le rang de u. Soit $(x_1, \cdots, x_r)$ une base de $\operatorname{Im} u \subset \ker u$. On la complète en une base $(x_1, \cdots, x_{n-r})$ de $\ker u$. De plus, pour i entre 1 et r, il existe $y_i \in E$ tel que $x_i = u(y_i)$.
Montrons que $(x_1, \cdots, x_{n-r}, y_1, \cdots, y_r)$ est une base de E.
Il suffit de montrer qu'elle est libre. Considérons une combinaison nulle :

$$\underbrace{\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_{n-r} x_{n-r}}_{\in \ker u} + \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_r y_r = 0_E$$
$$\Rightarrow \mu_1 u(y_1) + \cdots + \mu_r u(y_r) = 0_E \Rightarrow \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_r x_r = 0_E$$
$$\Rightarrow \mu_1 = \cdots = \mu_r = 0 \qquad \text{car } (x_1, \cdots, x_r) \text{ est libre.}$$

La matrice de u dans cette base est bien de la forme demandée.

3. Lorsqu'une matrice est de rang 1, toutes ses colonnes sont colinéaires.
Dans le cas d'une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, il existe des réels a, b, c, d, x, y, z, t tels que les quatre colonnes de M soient de la forme

$$x\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \ y\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \ z\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \ t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et } (x, y, z, t) \neq (0, 0, 0, 0)$$

car sinon le rang serait 0.
L'image de l'endomorphisme associé à cette matrice pour la base canonique est la droite engendrée par le vecteur de coordonnées (a, b, c, d). La relation $M^2 = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ est réalisée si et seulement si l'image est incluse dans le noyau, ce qui se traduit matriciellement par

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (xa + yb + zc + td) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

C'est équivalent à :

$$xa + yb + zc + td = 0$$

Exercice

Utilisons la formule de changement de bases :

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{U}' \mathcal{V}'} f = P_{\mathcal{V}' \mathcal{V}} \operatorname*{Mat}_{\mathcal{U} \mathcal{V}} f \, P_{\mathcal{U} \mathcal{U}'}$$

avec ici $\mathcal{V}$ dans le rôle de $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}$ dans le rôle de $\mathcal{V}'$. On en déduit :

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{V} \mathcal{U}} f = P \operatorname*{Mat}_{\mathcal{U} \mathcal{V}} f \, P$$