Problème

I. Nombre de partitions en k parties.

1. Une partition d'un ensemble E est un ensemble dont les éléments sont des parties de E (ces parties devant vérifier certaines conditions). Une partition est donc un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$. L'ensemble des partitions est donc une partie de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ ou un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$.
D'après le cours, si E est fini alors $\mathcal{P}(E)$ est aussi fini. L'ensemble des partitions d'un ensemble fini est donc un ensemble fini.

2. – Comme tous les éléments d'un partition sont des parties non vides et disjointes, pour $k > n$, il n'existe pas de partition de $[\![1, n]\!]$ en k parties.
$$k > n \Rightarrow S(n, k) = 0.$$
– La seule partition de E à un élément est le singleton $\{E\} \Rightarrow S(n, 1) = 1$.
– La seule partition de $[\![1, n]\!]$ à n éléments est $\{\{1\}, \{2\}, \cdots \{n\}\}$.
$$S(n, n) = 1.$$
– Les partitions de $[\![1, 4]\!]$ en 3 parties sont constituées d'une paire et deux singletons. Il y en a donc autant que de paires dans un ensemble à 4 éléments c'est à dire 6. Ces partitions sont
$$\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1\}, \{3\}, \{2, 4\}\}, \{\{1\}, \{4\}, \{2, 3\}\},$$
$$\{\{2\}, \{3\}, \{1, 4\}\}, \{\{2\}, \{4\}, \{1, 3\}\}, \{\{3\}, \{4\}, \{1, 2\}\}$$

3. Soit n et k dans $\mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$. Classons les partitions de $[\![1, n]\!]$ en k parties selon qu'elles contiennent ou non le singleton $\{n\}$.
– Soit $\mathcal{P}_0$ l'ensemble des partitions en k parties ne contenant pas $\{n\}$.
Soit $\mathcal{U} = \{A_1, \cdots, A_k\}$ une partition appartenant à $\mathcal{P}_0$. Il existe i tel que $n \in A_i$ et $A_i \setminus \{n\} \neq \emptyset$. Si on remplace A_i par $A_i \setminus \{n\} \neq \emptyset$ dans $\mathcal{U}$, on obtient une partition de $[\![1, n-1]\!]$ en k parties. On forme ainsi une application de $\mathcal{P}_0$ dans l'ensemble des partitions de $[\![1, n-1]\!]$ en k parties. Cette application est surjective mais elle n'est pas injective. Chaque partition de $[\![1, n-1]\!]$ est l'image de k partitions de $[\![1, n]\!]$ selon le A_i (avec i entre 1 et k) qui contient n. On en déduit
$$\sharp\mathcal{P}_0 = kS(n-1, k).$$
– Soit $\mathcal{P}_1$ l'ensemble des partitions en k parties contenant $\{n\}$.
À chaque partition $\mathcal{U} \in \mathcal{P}_1$, on peut associer $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \setminus \{n\}$ qui est une partition de $[\![1, n-1]\!]$ en $k-1$ parties. Cette fois l'application est bijective ce qui montre
$$\sharp\mathcal{P}_1 = S(n-1, k-1).$$
Avec la classification précédente,
$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k).$$

II. Nombres de Bell.

1. La formule résulte de la classification des partitions selon leur nombre de parties.
2. On classe les partitions de $[\![1, n+1]\!]$ selon la partie contenant $n+1$.
Soit A une partie contenant $n+1$, notons $\mathcal{P}_A$ l'ensemble des partitions $\mathcal{U}$ telles que $A \in \mathcal{U}$. La classification considérée montre alors
$$B_{n+1} = \sum_{\substack{A \subset [\![1, n+1]\!] \\ n+1 \in A}} \sharp\mathcal{P}_A.$$
Pour un $\mathcal{U} \in \mathcal{P}_A$, les éléments de $\mathcal{U}$ autres que A forment une partition de $[\![1, n]\!] \setminus A$. On en déduit que
$$\sharp\mathcal{P}_A = B_{n+1-\sharp A}.$$
On classe les A suivant leur nombre d'éléments autres que $n+1$. Pour i entre 0 et n, il existe $\binom{n}{i}$ parties A contenant i éléments autres que $n+1$ et pour ces A, $\sharp\mathcal{P}_A = B_{n-i}$. On en déduit
$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \text{ en posant } k = n - i.$$
3. a. Avec la formule de dérivation d'une fonction composée,
$$f'(x) = e^x f(x)$$
b. D'après les questions 1 et 2, la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complètement déterminée par récurrence par
$$B_0 = 1, \qquad B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Or $f(0) = e^0 = 1$ et, en utilisant la formule de Leibniz,

$$f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^x f^{(k)}(x) \Rightarrow f^{(n+1)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(0).$$

On en déduit que $B_n = f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. D'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et x,

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt, \qquad r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt$$

La somme que l'on nous demande de majorer est la partie principale du développement de Taylor de l'exponentielle en 1 écrite « à l'envers ».

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = e^1 - r_n(1) \Rightarrow e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} = r_n(1) \geq 0$$

car dans l'expression intégrale de r_n, les bornes sont dans le bon sens et les fonctions à intégrer sont positives.

5. Pour calculer $f^{(n+1)}(1)$, utilisons la formule de Leibniz dans l'expression de f' trouvée en 3.a.

$$\frac{f^{(n+1)}(1)}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(1)e = \frac{e}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}$$
$$\leq \frac{e}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \right) M_n \leq \frac{e^2}{n+1} M_n$$

d'après l'inégalité de la question précédente.
Pour n assez grand, $\frac{e^2}{n+1} < 1$ (par exemple $n \geq 8$). On en déduit que $M_{n+1} = M_n = \cdots = M_9 = M_8$.

$$\left(\forall n \geq 9,\ \frac{f^{(n)}(1)}{n!} \leq \frac{e^2 M_8}{n} \right) \Rightarrow \left(\frac{f^{(n)}(1)}{n!} \right)_{n\in\mathbb{N}} \to 0.$$

6. Toutes les dérivées de f s'expriment avec la formule de Leibniz. On en déduit qu'elles sont positives donc croissantes. En particulier $f^{(n)}(x) \leq f^{(n)}(1)$ pour tous les $n \in \mathbb{N}$ et tous les $x \in [-1,1]$. En intégrant, il vient, pour tout $x \in [0,1]$

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$
$$\leq (n+1) \left(\int_0^x (x-t)^n\,dt \right) \frac{f^{(n+1)}(1)}{(n+1)!} = \underbrace{\left[-(x-t)^{n+1} \right]_0^x}_{=x^{n+1} \leq 1} \frac{f^{(n+1)}(1)}{(n+1)!} \to 0.$$

Pour les $x \in [-1,0]$, le reste n'est pas forcément positif mais la valeur absolue se majore de la même manière

$$|R_n(x)| \leq \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \leq |x|^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(1)}{(n+1)!} \to 0.$$

III. Une suite de polynômes.

1. La famille $(H_0, H_1, \cdots, H_n)$ contient $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ vecteurs. Elle est libre car de degrés échelonnés, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. a. On peut factoriser H_k :

$$H_{k+1} + kH_k = X(X-1)\cdots H_k\,[(X-k)+k] = XH_k.$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ l'égalité à démontrer. Pour de petites valeurs de n :

$$S(0,0) = 1 \Rightarrow \mathcal{P}_0, \qquad (S(1,0) = 0, S(1,1) = 1) \Rightarrow \mathcal{P}_1.$$

Montrons que $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$. Supposons $\mathcal{P}_n$, alors :

$$X^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)XH_k = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\,(H_{k+1} + kH_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} S(n,k-1)H_k + \sum_{k=0}^{n} kS(n,k)H_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(\underbrace{S(n,k-1) + kS(n,k)}_{=S(n+1,k)} \Big) H_k + \underbrace{S(n,n)}_{=1=S(n+1,n+1)} H_{n+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k)H_k \quad \text{car } S(n+1,0) = 0.$$

3. a. D'après le cours :
$$\sharp\mathcal{F} = \sharp\mathcal{F}(\llbracket 1,n\rrbracket, \llbracket 1,p\rrbracket) = p^n.$$

b. Associons une relation d'équivalence $\mathcal{R}_f$ sur $\llbracket 1,n\rrbracket$ à une fonction $f \in \mathcal{F}$ par :
$$\forall (x,x') \in \llbracket 1,n\rrbracket,\ x\mathcal{R}_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$
Cette relation d'équivalence induit une partition $\mathcal{U}_f$ associée à f. Un élément de cette partition est l'ensemble des antécédents d'une image par f. Il s'agit d'une partition de $\llbracket 1,n\rrbracket$ en k parties où k est le nombre d'images distinctes par f.

c. D'après le cours, le nombre de fonctions injectives d'une ensemble à k éléments dans $\llbracket 1,n\rrbracket$ est
$$p(p-1)\cdots(p-k+1) = H_k(p).$$

d. Si on se donne une partition $\mathcal{U}$ en k parties, pour combien de $f \in \mathcal{F}$ a-t-on $\mathcal{U} = \mathcal{U}_F$? Les ensembles d'antécédents par f sont fixés mais pas les images. Il existe donc autant de f que d'injections entre les éléments de la partition et $\llbracket 1,p\rrbracket$ c'est à dire $H_k(p)$. En classant les f de $\mathcal{F}$ selon la partition $\mathcal{U}_f$ puis en regroupant les partitions suivant leur nombre de parties, on obtient
$$p^n = \sharp\mathcal{F} = \sum_{k=}^{n}\left(\sum_{\mathcal{U}\text{ partition en } k \text{ parties}} H_k(p)\right) = \sum_{k=}^{n} S(n,k)H_k(p).$$
On en déduit l'égalité polynomiale III.2b. car les deux fonctions polynomiales associées prennent les même valeurs pour une *infinité* de p.

IV. Somme de puissances.

1. Supposons $P = aX^b + bX^{p-1} + \cdots$ avec $p > 0$. Les termes de degré p et $p-1$ de $\Delta(P)$ sont
$$\begin{aligned} a(X+1)^p - aX^p + b(X+1)^{p-1} - bX^{p-1} + &\text{ termes de degré } < p-1 \\ = apX^{p-1} + &\text{ termes de degré } < p-1. \end{aligned}$$
Donc $\Delta(P)$ est de degré $p-1$ et de coefficient dominant ap. On en déduit que Δ est surjective et de noyau $\mathbb{R}_0[X]$.

2. a. Comme Δ est surjective, il existe des polynômes U (de degré $n+1$) tels que $\Delta(U) = (X+1)^n$. Le noyau de Δ étant formé des polynômes de degré 0, ces polynômes U sont égaux à une constante près. On en déduit que $U - U(0)$ est l'unique polynôme vérifiant les deux conditions. Il est noté U_n.

b. D'après les questions précédentes, U_1 est de la forme $aX^2 + bX$.
$$\Delta(U_1) = X + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow U_1 = \frac{1}{2}X(X+1).$$
U_2 est de la forme $aX^3 + bX^2 + cX$.
$$\Delta(U_2) = (X+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 2 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow U_2 = \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X = \frac{1}{6}(2X^2 + 3X + 1)X = \frac{1}{6}X(X+1)(2X+1).$$

c. On montre la formule demandée par récurrence sur p.
Si $p = 0$, alors $U_n(0) = 0 = 0^n$. Pour passer de p à $p+1$, utilisons $\Delta(U_n) = (X+1)^n$.
$$U_n(p+1) = U_n(p) + \Delta(U_n)(p) = \sum_{k=0}^{n} k^n + (p+1)^n.$$

3. L'encadrement est immédiant en intégrant les inégalités :
$$k - 1 \leq x \leq k \Rightarrow x^n \leq k^n \Rightarrow \int_{k-1}^{k} x^n\,dx \leq \int_{k-1}^{k} k^n\,dx = k^n$$
$$k \leq x \leq k+1 \Rightarrow k^n \leq x^n \Rightarrow k^n = \int_{k}^{k+1} k^n\,dx \leq \int_{k}^{k+1} x^n\,dx$$
En sommant les inégalités de $k = 1$ à p, on obtient
$$\int_0^p x^n\,dx \leq U_n(p) \leq \int_1^{p+1} x^n\,dx.$$
En calculant les intégrales, il vient
$$\frac{1}{n+1}p^{n+1} \leq U_n(p) \leq \frac{1}{n+1}\left((p+1)^{n+1} - 1\right) \Rightarrow 1 \leq \frac{U_n(p)}{\frac{p^{n+1}}{n+1}} \leq \left(\frac{p+1}{p}\right)^n \to 1$$
$$\Rightarrow (U_n(p))_{n\in\mathbb{N}^*} \sim \frac{p^{n+1}}{n+1}.$$

4. Calculons $\Delta(H_k)$ pour $k \geq 1$ (car $\Delta(H_0) = 0$) :

$$\begin{aligned}\Delta(H_k) &= (X+1)(X)\cdots(X-k+2) - X(X-1)\cdots(X-k+1) \\ &= X(X-1)\cdots(X-k+2)\left((X+1)-(X-k+1)\right) = kH_{k-1}.\end{aligned}$$

On en déduit

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{H}} \Delta_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

5. La question III.2. exprime X^n dans la base $\mathcal{H}$

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) H_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{S(n,k)}{k+1} \Delta(H_{k+1}) = \Delta\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{S(n,k)}{k+1} H_{k+1}\right)$$

car $\Delta(H_{k+1}) = (k+1)H_k$. Comme Δ commute avec la substitution de $X+1$ à X, on obtient

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{S(n,k)}{k+1} \widehat{H_{k+1}}(X+1)$$

à une constante près car ils ont la même image par Δ. Cette constante est nulle, car, en prenant la valeur en 0, comme $H_{k+1}(1) = 0$ dès que $k > 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{S(n,k)}{k+1} H_{k+1}(1) = S(n,0) = 0.$$

Exercice

1. a. Notons U_i l'événement « Effectuer le lancer i avec la pièce 1 »et $D_i = \overline{U_i}$ l'événement « Effectuer le lancer i avec la pièce 2 ». Avec les noms d'événements indiqués par l'énoncé, $C_1 = U_1$, $C_2 = D_1$

$$U_2 = P_1 \cup F_1' \Rightarrow \mathbb{P}(U_2) = \mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}_{U_1}(P_1) + \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}_{D_1}(F_2') = \frac{1}{2}(1 + p_1 - p_2).$$

b. On cherche la probabilité que le premier lancer ait été effectué avec la pièce 2 sachant que le second l'a été avec la pièce 1.

$$\mathbb{P}_{U_2}(D_1) = \frac{\mathbb{P}(D_1 \cap U_2)}{\mathbb{P}(U_2)} = \frac{\mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}_{D_1}(F_1')}{\mathbb{P}(U_2)} = \frac{\frac{1}{2}(1-p_1')}{\frac{1}{2}(1+p_1-p_2)} = \frac{1-p_1'}{1+p_1-p_2}.$$

2. Dans cette question, on considère au plus $n = 6$ lancers.

a. On cherche la probabilité sachant U_1 de l'événement « obtenir successivement pile puis face avec la pièce 1 puis deux fois pile avec la pièce 2 » noté A.

$$A = U_1 \cap P_1 \cap F_2 \cap F_3' \cap F_4' \Rightarrow \mathbb{P}_{U_1}(A) = p_1(1-p_1){p_2}^2.$$

b. On cherche la probabilité sachant D_1 de l'événement « jouer cinq fois de suite avec la pièce 2 puis jouer le sixième lancer avec la pièce 1 » noté B.

$$B = D_1 \cap P_1' \cap P_2' \cap P_3' \cap P_4' \cap F_5' \Rightarrow \mathbb{P}_{D_1}(B) = {p_2}^4(1-p_2).$$

c. Notons C l'événement « Effectuer le premier lancer avec la pièce 1 et les deux lancers suivant avec des pièces différentes » . Cet événement est $F_1 \cap F_2'$ car le résultat du dernier lancer n'importe pas.

$$\mathbb{P}_{U_1}(C) = (1-p_1)(1-p_2) = (1-p_1)(1-p_2).$$

d. Notons D l'événement « Effectuer les trois premiers lancers avec la même pièce ».

$$D = (U_1 \cap P_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (D_1 \cap P_1' \cap P_2' \cap P_3') \Rightarrow \mathbb{P}(D) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2).$$

3. Dans cette question, $n = 12$. On cherche la probabilité de jouer le douzième lancer avec la pièce 2 sachant que l'on a joué le dixième lancer avec la pièce 1.

$$\mathbb{P}_{U_{10}}(D_{12}) = \frac{\mathbb{P}(U_{10} \cap D_{12})}{\mathbb{P}(U_{10})}$$

Or $U_{10} \cap D_{12} = U_{10} \cap ((P_{10} \cap F_{11}) \cup (F_{10} \cap P_{11}'))$ d'où

$$\mathbb{P}_{U_{10}}(D_{12}) = p_1(1-p_1) + (1-p_1)p_2 = (1-p_1)(p_1+p_2).$$