Problème

Soit E un ensemble non vide, on appelle *partition* de E tout ensemble $\mathcal{U} = \{A_1, \cdots, A_k\}$ de parties de E tel que

- pour $i \in [\![1, k]\!]$, chaque A_i est une partie non vide de E,
- les parties $A_1, \cdots, A_k$ sont deux à deux disjointes : $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $i \neq j$ entre 1 et k,
- la réunion de A_i forme E tout entier : $\bigcup_{i \in [\![1,k]\!]} A_i = E$.

Si $\mathcal{U}$ est une partition de E et si k est le nombre d'éléments de $\mathcal{U}$, on dit aussi que $\mathcal{U}$ est une partition de E en k parties.

I. Nombre de partitions en k parties.

1. Soit k et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble des partitions de $[\![1, n]\!]$ en k parties est fini.
   Dans tout le problème, pour tout $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $S(n, k)$ le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$ en k parties. On convient aussi que
   $$S(0, 0) = 1, \qquad \forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ S(n, 0) = S(0, k) = 0.$$
2. En énumérant les partitions, exprimer $S(n, k)$ en fonction de n et k dans les cas suivants :
   $$k > n, \qquad k = 1, \qquad k = n, \qquad n = 4 \text{ et } k = 3.$$
3. En distinguant les partitions selon qu'elles contiennent ou non le singleton $\{n\}$, montrer que
   $$\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k).$$

II. Nombres de Bell.

Dans toute la suite, on définit les nombres de Bell B_n par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k).$$

1. Montrer que B_n est égal au nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.
2. Démontrer la formule
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$
3. On définit une fonction f dans $\mathbb{R}$ par :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{(e^x - 1)}.$$
   a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$.
   b. Montrer que $f^{(n)}(0) = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $r_n(x)$ et $R_n(x)$ par
   $$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + r_n(x)$$
   $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$
   Exprimer $r_n(x)$ et $R_n(x)$ à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral.
   Montrer que
   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leq e.$$
5. Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{f^{(n+1)}(1)}{(n+1)!} \leq \frac{e^2}{n+1} M_n \ \text{ avec } M_n = \max\left(\frac{f^{(k)}(1)}{k!},\ k \in [\![0, n]\!] \right).$$
   En déduire que la suite $\left(\frac{f^{(n)}(1)}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
6. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, la suite $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

III. Une suite de polynômes.

On définit une suite de polynômes $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ par :
$$H_0 = 1, \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ H_k = X(X-1)\cdots(X-k+1).$$

1. Montrer que $(H_0, \cdots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, établir une expression simplifiée de $H_{k+1} + kH_k$.
   b. En déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ X^n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k) H_k.$$

Rémy Nicolai M1815E

3. On se propose de redémontrer la formule de la question précédente par une méthode de dénombrement. Soit k, p, n dans $\mathbb{N}^*$.
   a. Quel est le cardinal de l'ensemble (noté $\mathcal{F}$) des fonctions de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$?
   b. Comment peut-on associer une partition de $[\![1,n]\!]$ à une fonction $f \in \mathcal{F}$?
   c. Quel est le cardinal de l'ensemble des fonctions injectives d'un ensemble à k éléments dans $[\![1,p]\!]$?
   d. Montrer que
$$p^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) H_k(p)$$
   et en déduire la formule de III.2.b.

IV. Somme de puissances.

Dans cette partie, $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On définit $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ par :
$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Delta(P) = \widehat{P}(X+1) - P.$$

1. Pour un polynôme P non nul de degré p et de coefficient dominant a, préciser le degré et le coefficient dominant de $\Delta(P)$. En déduire le noyau et l'image de Δ.
2. a. Montrer qu'il existe un unique polynôme U_n tel que
$$\Delta(U_n) = (X+1)^n \ \text{ et } \ U_n(0) = 0.$$
   Quel est son degré ?
   b. En formant des systèmes d'équations linéaires, calculer U_1 et U_2.
   c. Montrer que
$$\forall p \in \mathbb{N},\ U_n(p) = \sum_{k=0}^{p} k^n.$$
3. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \int_{k-1}^{k} x^n\,dx \leq k^n \leq \int_{k}^{k+1} x^n\,dx.$$
   En déduire un équivalent pour la suite $(U_n(p))_{p\in\mathbb{N}^*}$.
4. On note Δ_n l'endomorphisme induit par Δ sur le sous-espace stable $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice A de Δ_n dans la base $\mathcal{H} = (H_0, \cdots, H_n)$.
5. Quelles sont les coordonnées de X^n dans la base $\mathcal{H}$? En déduire
$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{S(n,k)}{k+1} \widehat{H_{k+1}}(X+1).$$

Exercice

On dispose de deux pièces de monnaie discernables, désignées dans la suite de l'exercice par « pièce 1 » et « pièce 2 ». On effectue une série de n lancers indépendants ($n \in \mathbb{N}^*$) avec l'une ou l'autre des pièces selon un protocole décrit plus loin.
Pour un lancer, la probabilité d'obtenir pile est p_1 pour la pièce 1 et p_2 pour la pièce 2 avec $0 < p_1 < 1$ et $0 < p_2 < 1$.
On introduit des notations pour certains événements. Pour $i \in [\![1,n]\!]$:
- « le lancer i est effectué avec la pièce 1 et donne pile » : P_i,
- « le lancer i est effectué avec la pièce 1 et donne face » : F_i,
- « le lancer i est effectué avec la pièce 2 et donne pile » : P'_i,
- « le lancer i est effectué avec la pièce 2 et donne face » : F'_i.

Le protocole pour les lancers est le suivant. On choisit une des deux pièces au hasard pour effectuer le premier lancer. Si le résultat d'un lancer est pile, on rejoue avec la même pièce sinon on change de pièce pour le lancer suivant.
L'événement « choisir la pièce 1 pour le premier lancer » est noté C_1 alors que « choisir la pièce 2 pour le premier lancer » est noté C_2 avec
$$\mathbb{P}(C_1) = \mathbb{P}(C_2) = \frac{1}{2}.$$

1. Dans cette question $n = 2$.
   a. Quelle est la probabilité d'effectuer le second lancer avec la pièce 1 ?
   b. On effectue le second lancer avec la pièce 1. Quelle est la probabilité que la premier lancer ait été effectué avec la pièce 2 ?
2. Dans cette question, $n = 6$.
   a. Sachant que la pièce 1 a été choisie pour le premier lancer, calculer (en fonction de p_1 et p_2) la probabilité de l'événement « obtenir successivement pile puis face avec la pièce 1 puis deux fois pile avec la pièce 2 ». On note A cet événement.
   b. Sachant que la pièce 2 a été choisie pour le premier lancer, calculer (en fonction de p_1 et p_2) la probabilité de l'événement « jouer cinq fois de suite avec la pièce 2 puis jouer le sixième lancer avec la pièce 1 ». On note B cet événement.

c. Sachant que le premier lancer a été effectué avec la pièce 1, quelle est la probabilité de jouer les deux lancers suivant avec des pièces différentes ?

d. Quelle est la probabilité d'effectuer les trois premiers lancers avec la même pièce ?

3. Dans cette question, $n = 12$. Sachant que l'on a joué le dixième lancer avec la pièce 1, quelle est la probabilité de jouer le douzième avec la pièce 2 ?