Problème

Dans ce problème[1], n désigne un entier naturel. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le *polynôme caractéristique* de la matrice A (noté P_A) est le polynôme associé à la fonction $x \to \det(xI_n - A)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Partie I. Coefficients du polynôme caractéristique

1. Calculer les polynômes caractéristiques des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & -d \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, préciser le degré de P_A, son coefficient dominant, le coefficient du terme de degré $n-1$ et le coefficient du terme de degré 0.
3. Pour i entre 1 et n, on note $X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice i qui vaut 1.
   a. Montrer que pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et h réel, le coefficient de h dans le développement de $\det(hI_n + B)$ est $\operatorname{tr}({}^t\mathrm{Com}\, B)$.
   b. En déduire le coefficient du terme de degré 1 dans P_A.

Partie II. Théorème de Cayley-Hamilton

Dans cette partie et la suivante, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fixée et on note P au lieu de P_A avec

$$P = P_A = X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \cdots + a_{n-1} X + a_n \text{ et } a_0 = 1$$

On définit aussi, pour tout x réel, la matrice $C(x)$ par

$$C(x) = {}^t\mathrm{Com}(xI_n - A)$$

1. Soit $B_0, B_1, \cdots, B_n$ des matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour une infinité de x réels,

$$B_0 + xB_1 + \cdots + x^n B_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

   Montrer que $B_0, B_1, \cdots, B_n$ sont nulles. En déduire un principe d'identification à formuler clairement.

2. Montrer qu'il existe des matrices $C_0, C_1, \cdots, C_{n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$C(x) = C_0 + xC_1 + \cdots + x^{n-1} C_{n-1}$$

3. Montrer les relations suivantes

$$\begin{aligned} C_{n-1} &= I_n \\ C_{n-2} - C_{n-1}A &= a_1 I_n \\ C_{n-3} - C_{n-2}A &= a_2 I_n \\ &\vdots \\ C_0 - C_1 A &= a_{n-1} I_n \\ -C_0 A &= a_n I_n \end{aligned}$$

4. a. Exprimer $C_{n-1}, C_{n-2}, \cdots, C_1, C_0$ en fonction de A.
   b. Prouver le théorème de Cayley-Hamilton c'est à dire

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

Partie III. Application aux matrices nilpotentes

1. a. Écrire le développement de $P(x+h)$ suivant les puissances de h à l'aide de la formule de Taylor.
   b. Montrer que $P'(x) = \operatorname{tr}(C(x))$.
2. Montrer que $\operatorname{tr}(C_j) = (j+1)\, a_{n-j-1}$ pour tous les j entre 1 et $n-1$.
3. Montrer que $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^2) = \cdots = \operatorname{tr}(A^n) = 0$ implique $A^n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

[1] d'après Ec Sup d'Ingénieurs de Marseille Math 2 M 1990