Exercice 1

1. On va montrer que l'ensemble des points vérifiant l'équation est le cercle de centre le point d'affixe $\frac{4i}{3}$ et de rayon $\frac{2}{3}$.
Notons x la partie réelle de m et y sa partie imaginaire. L'équation devient :
$$|m| = 2|m-i| \Leftrightarrow |m|^2 = 4|m-i|^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4x^2+4(y-1)^2$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2-8y=-4 \Leftrightarrow x^2+(y-\frac{4}{3})^2 = -\frac{4}{3}+\frac{16}{9} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

2. On va montrer que l'ensemble des points cherché est l'union de l'axe des ordonnées (privé de $-i$) et du cercle de centre le point d'affixe $-i$ et de rayon 1.
Pour tout m complexe différent $-i$, transformons l'expression de départ
$$\frac{m^2}{m+i} = \frac{m^2(\overline{m}-i)}{|m-i|^2} = \frac{|m|^2m - im^2}{|m-i|^2}.$$
On en déduit :
$$\frac{m^2}{m+i}\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{m^2}{m+i}\right)=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(|m|^2m-im^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow |m|^2\,\mathrm{Re}(m)+\mathrm{Im}(m^2)=0 \Leftrightarrow x\left(x^2+y^2+2y\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x^2+(y+1)^2=1.$$

Exercice 2

1. Le calcul de c et d ne pose pas de problème : $c=1+i$, $d=i$.
On obtient les centres des carrés comme milieux de sommets opposés :
$$w = \frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$
Pour le calcul de u et v, on introduit les points B_1 avec $b_1 = b+\gamma$ et C_1 avec $c_1 = c+(1-\gamma)$ (figure 1).
$$u = \frac{1}{2}(g+c_1) = \frac{1}{2}(1+\gamma i+1+i+(1-\gamma)) = \frac{3-\gamma}{2}+\frac{1+\gamma}{2}i$$
$$v = \frac{1}{2}(g+b_1) = \frac{1}{2}(1+\gamma i+1+\gamma) = \frac{2+\gamma}{2}+\frac{\gamma}{2}i$$

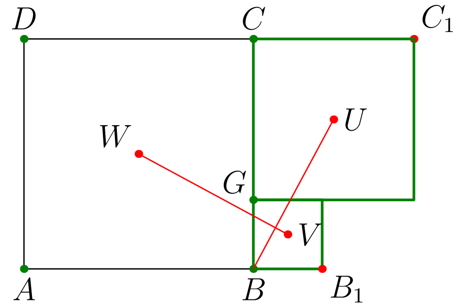

Fig. 1: Calcul des affixes.

2. Calculons les affixes des vecteurs $\overrightarrow{UB}$ et $\overrightarrow{VW}$.
$$\left.\begin{aligned} b-u &= \frac{-1+\gamma}{2}-\frac{1+\gamma}{2}i \\ w-v &= -\frac{1+\gamma}{2}+\frac{1-\gamma}{2}i \end{aligned}\right\} \Rightarrow i(w-v) = b-u$$
Les segments UB et VW sont donc orthogonaux et de même longueur.