Exercice 1

Soit h l'application de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\} : \qquad h(z) = \frac{z+2i}{1-iz}$$

1. Montrer que h définit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$.
2. Étudier les z tels que $h(z) = z$ (points fixes de h).
   On en trouvera deux qui seront notés p et q.
3. Factoriser $h(z) - h(z')$ pour z et z' complexes autres que $-i$.
4. Calculer $B(p, q, h(z), z)$ pour z complexe différent de p et q avec

$$B(m_1, m_2, m_3, m_4) = \frac{(m_2 - m_1)(m_4 - m_3)}{(m_4 - m_1)(m_3 - m_2)}$$

   On considère les points P, Q, Z', Z d'affixes p, q, $h(z)$, z. Que peut-on en déduire sur les mesures des angles orientés $(\overrightarrow{PZ}, \overrightarrow{PQ})$ et $(\overrightarrow{Z'Z}, \overrightarrow{Z'Q})$?

Exercice 2

1. Soit a et b des entiers tels que $0 \leq a \leq b$, énoncer et démontrer une expression factorisée de

$$\sum_{k=a}^{b} k$$

2. Pour n naturel non nul, on considère la somme double

$$S_2(n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j} \right)$$

   a. Représenter, dans un plan rapporté à un repère avec les i en abscisses et les j en ordonnées l'ensemble des points de coordonnées (i, j) pour les couples d'indices de la somme.

   b. Calculer $S_2(n)$ en échangeant les sommations.

3. Pour n naturel non nul, calculer la somme triple

$$S_3(n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \frac{i}{jk} \right) \right)$$

4. Pour tous n et k naturels non nuls, montrer que

$$\sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n} \frac{i_1}{i_2 i_3 \cdots i_k} = \frac{n(n + 2^k - 1)}{2^k}$$

   la somme porte sur les k-uplets $(i_1, \cdots, i_k) \in [\![1, n]\!]^k$ tels que $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$.