# Problème 1

1. a. La dérivée de $f$ se calcule avec la formule
$$(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}$$
c'est à dire
$$f'(x) = \frac{1}{2\sin f(x)}$$
Pour tout $x \in ]0,4[$ on a $x = 2(1-\cos f(x))$ d'où
$$\cos f(x) = \frac{2-x}{2}$$
D'autre part $f(x) \in ]0,\pi[$ donc
$$\sin f(x) = \sqrt{1-\cos^2 f(x)} = \frac{1}{2}\sqrt{x(4-x)}$$
On en déduit
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}$$
b. Le calcul est analogue avec $x<0$. D'une part $2(1-\operatorname{ch} g(x)) = x$ donc
$$\operatorname{ch} g(x) = \frac{2-x}{2}$$
D'autre part $g(x) > 0$ donc
$$g'(x) = -\frac{1}{2\operatorname{sh} f(x)} = -\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch}^2 g(x) - 1}} = -\frac{1}{\sqrt{x(x-4)}}$$

2. a. On vérifie facilement que
$$\frac{x-2}{x(x-4)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-4}$$
Pour trouver les coefficients, on peut par exemple réduire au même dénominateur et former un système de deux équations aux deux inconnues $a$, $b$ en identifiant les coefficients de
$$x-2 = (a+b)x - 4a$$
b. Une solution de l'équation proposée est $e^{-A}$ où $A$ est une primitive de
$$\frac{x-2}{x(x-4)}$$
D'après a., on peut choisir
$$A(x) = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-4|$$
Dans chaque intervalle l'ensemble des solutions est donc
$$\{\frac{\lambda}{\sqrt{|x(x-4)|}}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$
c. On va montrer que la fonction constante nulle est la seule solution continue et dérivable dans $\mathbb{R}$
En effet, si $f$ est une solution dans $\mathbb{R}$ tout entier alors dans chaque intervalle (par exemple $]-\infty, 0[$) la restriction de $f$ est de la forme
$$\frac{\lambda}{\sqrt{|x(x-4)|}}$$
avec des $\lambda$ à priori distincts dans chaque intervalle. Mais cette restriction doit converger aux extrémités de l'intervalle (par exemple à gauche de 0) ce qui n'est possible que si $\lambda = 0$. Ainsi chaque restriction est identiquement nulle.

3. a. D'après 1.a. $f'(x)\sin f(x) = \frac{1}{2}$ et $\sin^2 f(x) = \frac{x(4-x)}{4}$ donc
$$\frac{f'(x)}{\sin f(x)} = \frac{2}{x(4-x)}$$
Posons $y = \frac{f}{\sin \circ f}$, on déduit des remarques précédentes que
$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{f'(x)}{\sin f(x)} - \frac{f(x)f'(x)\cos f(x)}{\sin^2 f(x)} \\ &= \frac{2}{x(4-x)} - \frac{2}{x(4-x)} y(x) \frac{2-x}{2} \end{aligned}$$
d'où
$$x(x-4)y'(x) + (x-2)y(x) = -2$$

b. Un calcul analogue au précédent montre que

$$\frac{g}{\operatorname{sh} \circ g}$$

est solution de la *même* équation différentielle

$$x(x-4)y'(x) + (x-2)y(x) = -2$$

mais dans l'intervalle $]-\infty, 0[$.

# Exercice

1. L'addition parallèle est clairement commutative. L'associativité se déduit de ce que

$$(a//b)//c = \frac{\frac{ab}{a+b}c}{\frac{ab}{a+b} + c} = \frac{abc}{ab + ac + bc}$$

s'exprime de manière symétrique en fonction de $a$, $b$, $c$.
Il n'existe pas de neutre car $a//b = b$ entrainerait $0 = b^2$. La question des éléments inversibles ne se pose pas car il n'y a pas d'élément neutre.

2. L'ensemble des $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ tels que $y + z = x$ est aussi l'ensemble des $(y, x - y)$ où $y$ est un réel quelconque.
Considérons la fonction du second degré en $y$

$$ay^2 + b(x-y)^2 = (a+b)y^2 - 2bxy + bx^2$$

Comme $a + b > 0$, la plus petite valeur que prend cette expression est atteinte pour

$$y_0 = \frac{bx}{a+b}$$

et vaut

$$\frac{b^2x^2}{a+b} - \frac{2b^2x^2}{a+b} + bx^2 = \frac{ab}{a+b}x^2.$$

Ainsi, $(a//b)x^2$ est non seulement la borne inférieure mais aussi le plus petit élément de l'ensemble proposé. La relation est vérifiée pour

$$(y_0, z_0) = (\frac{bx}{a+b}, x - \frac{bx}{a+b}).$$

3. Avec les conventions de l'énoncé, $ay^2$ et $bz^2$ représentent les énergies dissipées dans chaque résistance. Le courant se répartit entre les deux branches de façon à minimiser l'énergie dissipée. La résistance équivalente $a//b$ permet d'exprimer cette énergie en respectant la loi d'Ohm.

4. Considérons des réels $y$ et $z$ quelconques tels que $y + z = x$. D'après la question précédente :

$$(a//c)x^2 + (b//d)x^2 \leq ay^2 + cz^2 + by^2 + dz^2 = (a+b)y^2 + (c+d)z^2$$

Donc $(a//c)x^2 + (b//d)x^2$ est un minorant de

$$\{(a+b)y^2 + (c+d)z^2, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \operatorname{tq} y + z = x\}.$$

Comme la borne inférieure $((a+b)//(c+d))$ est le plus grand des minorants, on a bien l'inégalité proposée.

5. Cette formule s'obtient de manière évidente par récurrence à partir de la précédente.