Problème 1

1. a. La fonction

$$\begin{array}{rcl}]0,\pi[& \rightarrow &]0,4[\\ t & \rightarrow & 2(1-\cos t) \end{array}$$

est bijective, dérivable et sa dérivée ne s'annule pas dans $]0,\pi[$. On note f sa bijection réciproque, préciser la dérivée de f

   b. La fonction

$$\begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \rightarrow &]-\infty,0[\\ t & \rightarrow & 2(1-\operatorname{ch} t) \end{array}$$

est bijective, dérivable et sa dérivée ne s'annule pas dans $]0,\pi[$. On note g sa bijection réciproque, préciser la dérivée de g

2. a. Calculer les réels a et b tels que pour tout réel x différent de 0 et de 4, on ait

$$\frac{x-2}{x(x-4)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-4}$$

   b. Préciser dans chaque intervalle l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$x(x-4)y' + (x-2)y = 0$$

   c. Quelles sont les fonctions continues et dérivables dans $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation dans $\mathbb{R}$.

3. a. Montrer que la fonction $\frac{f}{\sin\circ f}$ est solution dans $]0,4[$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à préciser.

   b. Montrer que la fonction $\frac{g}{\operatorname{sh}\circ g}$ est solution dans $]-\infty,0[$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à préciser.

Exercice

On définit la *somme parallèle*[1] de deux réels strictement positifs par :

$$\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2,\ a//b = \frac{ab}{a+b}.$$

1. Cette opération est-elle commutative, associative, admet-elle un élément neutre ?
2. Soit x un réel quelconque. Montrer que

$$(a//b)x^2 = \inf\{ay^2 + bz^2, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y+z=x\}$$

   Cette borne inférieure est-elle un plus petit élément ?
   Si oui, pour quels couples (y_0,z_0) la relation $(a//b)x^2 = ay_0^2 + bz_0^2$ est-elle satisfaite ?
3. Interpréter physiquement les résultats de la question précédente en prenant pour y et z les intensités des courants électriques qui traversent des résistances a et b montées en parallèle.
4. Soit a, b, c, d des réels strictement positifs et x un réel quelconque. Montrer que

$$(a//c)x^2 + (b//d)x^2 \leq ((a+b)//(c+d))x^2.$$

   Interpréter physiquement cette inégalité.
5. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i // \beta_i) \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) // \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i\right).$$

[1] d'après X 99 PC 1