Exercice.

1. L'application u^+ est linéaire comme combinaison de composées d'applications linéaires. Considérons $u \circ h$ pour un h quelconque dans G :
$$u^+ \circ h = \frac{1}{m} \sum_{g\in G} g^{-1} \circ u \circ g \circ h = \frac{1}{m} h \circ \sum_{g\in G} (g \circ h)^{-1} u \circ (g \circ h).$$
Pour h fixé, $g' = g \circ h$ décrit le groupe G lorsque g décrit G donc
$$u^+ \circ h = \frac{1}{m} h \circ \sum_{g'\in G} g'^{-1} \circ u \circ g' = h \circ u^+.$$
2. Comme u^+ commute avec tout élément g de G,
$$u^{++} = \frac{1}{m} \sum_{g\in G} g^{-1} \circ u^+ \circ g = \frac{1}{m} \sum_{g\in G} g^{-1} \circ g \circ u^+ = u^+.$$
3. a. L'application p est un projecteur sur F qui est stable par les éléments de G donc :
$$\forall x \in F,\ p^+(x) = \frac{1}{m} \sum_{g\in G} g^{-1} \circ p(\underbrace{g(x)}_{\in F}) = \frac{1}{m} \sum_{g\in G} g^{-1} \circ g(x) = x$$
donc F est inclus dans l'image de p^+.
D'autre part, pour tout x de E, $p(g(x)) \in F$ donc $g^{-1} \circ p \circ g(x) \in F$ par stabilité puis $p^+(x) \in F$ par linéarité. On en déduit que F est l'image de p^+.

   b. Soit g et h quelconques dans G et y quelconque dans E. Alors
$$\begin{aligned}
&p(y) \in F \Rightarrow g \circ h^{-1} \circ p(y) \in F \text{ (stabilité de } F)\\
&\Rightarrow p \circ g \circ h^{-1} \circ p(y) = g \circ h^{-1} \circ p(y) \Rightarrow p \circ g \circ h^{-1} \circ p = g \circ h^{-1} \circ p \text{ (à cause du } \forall y)\\
&\Rightarrow g^{-1} \circ p \circ g \circ h^{-1} \circ p \circ h = g^{-1} \circ g \circ h^{-1} \circ p \circ h = h^{-1} \circ p \circ h.
\end{aligned}$$

   c. Pour montrer que p^+ est un projecteur, on forme $p^+ \circ p^+$.
$$\begin{aligned}
p^+ \circ p^+ &= \frac{1}{m^2} \sum_{(g,h)\in G^2} g^{-1} \circ p \circ g \circ h^{-1} \circ p \circ h\\
&= \frac{1}{m^2} \sum_{(g,h)\in G^2} h^{-1} \circ p \circ h = \frac{1}{m} \sum_{g\in G} p^+ = p^+.
\end{aligned}$$

   d. Pour tout $x \in \ker p^+$, $p^+ \circ g(x) = g \circ p^+(x) = 0$ donc $g(x) \in \ker p^+$. D'où $\ker p^+$ est stable par G.

Problème.

1. Par des propriétés de cours : $\dim \mathbb{R}_{\alpha+\beta-1}[X] = \alpha + \beta$ et
$$\dim (\mathbb{R}_{\beta-1}[X] \times \mathbb{R}_{\alpha-1}[X]) = \dim \mathbb{R}_{\beta-1}[X] + \dim \mathbb{R}_{\beta-1}[X] = \alpha + \beta$$
On remarque que
$$\dim (\mathbb{R}_{\beta-1}[X] \times \mathbb{R}_{\alpha-1}[X]) = \dim \mathbb{R}_{\alpha+\beta-1}[X].$$
Ce qui jouera un rôle par la suite.
2. L'application
$$\begin{aligned}\mathbb{R}_{\alpha+\beta-1}[X] &\to \mathbb{R}\\ P &\to \widetilde{P}(a)\end{aligned}$$
est linéaire et à valeurs dans le corps de base $\mathbb{R}$. C'est une forme linéaire non nulle car l'image du polynôme 1 de degré 0 est non nulle. Son noyau $\mathcal{N}_a$ est donc un hyperplan. Sa dimension est
$$\dim \mathcal{N}_a = \dim \mathbb{R}_{\alpha+\beta-1}[X] - 1 = \alpha + \beta - 1.$$
3. Si Q est nul $\mathcal{M}(Q)$ est réduit au vecteur nul, c'est évidemment un sous-espace vectoriel. Il est de dimension 0 par convention et ne possède pas de base. Lorsque Q est non nul, soit q son degré et considérons l'application
$$\begin{aligned}\mathbb{R}_{\alpha+\beta-1-q}[X] &\to \mathbb{R}_{\alpha+\beta-1}[X]\\ P &\to PQ.\end{aligned}$$
Elle est bien définie car le degré d'un produit est la somme des degré. Elle est linéaire et injective car l'anneau des polynômes est intègre. De plus $\mathcal{M}(Q)$ est l'espace vectoriel image. Par injectivité la dimension est conservée donc
$$\dim \mathcal{M}(Q) = \dim \mathbb{R}_{\alpha+\beta-1-q}[X] = \alpha + \beta - q.$$
4. La linéarité de Φ est évidente.
5. a. – Démonstration 1. On va démontrer en fait
$$A \wedge B \neq 1 \Rightarrow \Phi \text{ non injective.}$$
Soit M un diviseur commun à A et B de degré non nul. Il existe A_1 et B_1 dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $A = MA_1$ et $B = MB_1$. Ils vérifient $\deg A_1 < \alpha$ et $\deg B_1 < \beta$ donc $(B_1, -A_1) \in \mathbb{R}_{\beta-1}[X] \times \mathbb{R}_{\alpha-1}[X]$ est un élément non nul du noyau de Φ.

Rémy Nicolai M1912C

– Démonstration 2. Comme les espaces de départ et d'arrivée de Φ sont de même dimension :

$$\begin{aligned}\Phi \text{ injective } &\Rightarrow \Phi \text{ surjective}\\ &\Rightarrow \exists (P,Q)\in \mathbb{R}_{\beta-1}[X]\times\mathbb{R}_{\alpha-1}[X] \text{ tq } PA+QB=1\\ &\Rightarrow A\wedge B=1 \quad \text{(d'après le théorème de Bezout).}\end{aligned}$$

b. – Démonstration 1. Comme les espaces de départ et d'arrivée de Φ sont de même dimension :

$$\Phi \text{ surjective } \Rightarrow \Phi \text{ injective } \Rightarrow A\wedge B=1 \quad \text{(d'après a).}$$

– Démonstration 2.

$$\begin{aligned}\Phi \text{ surjective } &\Rightarrow \exists (P,Q)\in \mathbb{R}_{\beta-1}[X]\times\mathbb{R}_{\alpha-1}[X] \text{ tq } PA+QB=1\\ &\Rightarrow A\wedge B=1 \quad \text{(d'après le théorème de Bezout).}\end{aligned}$$

c. – Démonstration 1. On suppose $A\wedge B=1$. On considère $(P,Q)\in\ker\Phi$ donc $PA+QB=0$ avec $\deg P<\beta$ et $\deg Q<\alpha$. Alors

$$\left.\begin{aligned}&A \text{ divise } QB\\ &A\wedge B=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow A \text{ divise } Q \quad \text{(d'après thm. de Gauss).}$$

Comme $\deg Q<\alpha=\deg A$ ceci n'est possible que si Q est nul ce qui entraine que $\ker\Phi$ est réduit au vecteur nul donc Φ est injective.

– Démonstration 2. Comme les espaces de départ et d'arrivée de Φ sont de même dimension :

$$A\wedge B=1\Rightarrow \Phi \text{ surjective} \qquad \text{(d'après d)}\Rightarrow \Phi \text{ injective .}$$

d. – Démonstration 1. On suppose A et B premiers entre eux. D'après le théorème de Bezout, il existe des polynômes P_0 et Q_0 tels que $P_0A+Q_0B=1$.
Pour n'importe quel polynôme $S\in\mathbb{R}_{\alpha+\beta-1}[X]$, il existe des polynômes P_1 et Q_1 tels que $P_1A+Q_1B=S$. On peut prendre par exemple $P_1=SP_0$ et $Q_1=SQ_0$. Mais ces polynômes peuvent avoir un degré trop élevé.
Écrivons une division euclidienne de P_1 par B :

$$P_1=TB+P \text{ avec } \deg(P)<\beta.$$

Définissons Q par $Q=Q_1+TA$. Alors $PA+QB=S$ avec $\deg(P)<\beta$.
Il reste à vérifier la condition $(<\alpha)$ sur le degré de Q pour prouver que (P,Q) est un antécédent de S par Φ.

$$\left.\begin{aligned}\deg(PA)=\deg P+\deg A &<\alpha+\beta\\ \deg S &<\alpha+\beta\end{aligned}\right\}\Rightarrow \deg(QB)=\deg(S-PA)<\alpha+\beta$$
$$\Rightarrow \deg Q+\deg A<\alpha+\beta\Rightarrow \deg Q<\alpha.$$

– Démonstration 2. Comme les espaces de départ et d'arrivée de Φ sont de même dimension :

$$A\wedge B=1\Rightarrow \Phi \text{ injective} \qquad \text{(d'après c)}\Rightarrow \Phi \text{ surjective .}$$

6. D'après le théorème de Bezout, l'image de Φ est l'ensemble $\mathcal{M}(A\wedge B)$ des multiples du pgcd. On en déduit le rang de Φ par la question 3. qui conduit au résultat demandé

$$\operatorname{rg}\Phi=\alpha+\beta-\deg(A\wedge B)\Rightarrow \deg(A\wedge B)=\alpha-\beta-\operatorname{rg}\Phi.$$