Partie I. Parties entières

1. Comme la fonction partie entière est constante sur des intervalles, il est clair que la fonction φ le sera aussi. Les bornes de ces intervalles seront précisées plus loin. Pourtant elle ne peut être ni ni en escalier ni continue par morceaux (ou intégrable puisque c'est la même chose) car son domaine de définition n'est pas un segment. En revanche, la restriction φ_m est en escalier donc continue par morceaux et intégrable.
2. a. Pour tout $x > 0$, on écrit les définitions des deux parties entières et on combine les encadrements

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{x}-1<\lfloor\frac{2}{x}\rfloor\leq\frac{2}{x}\\ \frac{1}{x}-1<\lfloor\frac{1}{x}\rfloor\leq\frac{}{x}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2}{x}-1-2\frac{1}{x}<\varphi(x)<\frac{2}{x}-2(\frac{1}{x}-1)$$

$$\Rightarrow -1<\varphi(x)<2\Rightarrow \varphi(x)\in\{0,1\}$$

car φ est à valeurs entières.

b. Remarquons d'abord que φ prend la valeur 0 en un inverse d'entier. On se place donc dans l'intervalle ouvert. D'une part,

$$\frac{1}{k+1}<x<\frac{1}{k}\Rightarrow k<\frac{1}{x}<k+1\Rightarrow\lfloor\frac{1}{x}\rfloor=k$$

D'autre part,

$$\frac{1}{k+1}<x<\frac{1}{k}\Rightarrow 2k<\frac{2}{x}<2k+2\Rightarrow\lfloor\frac{2}{x}\rfloor\in\{2k,2k+1\}$$

avec :

$$\varphi(x)=0\Leftrightarrow\lfloor\frac{2}{x}\rfloor=2k\Leftrightarrow\frac{2}{x}<2k+1\Leftrightarrow x>\frac{2}{2k+1}=\frac{1}{k+\frac{1}{2}}$$

$$\varphi(x)=1\Leftrightarrow\lfloor\frac{2}{x}\rfloor=2k+1\Leftrightarrow\frac{2}{x}\geq 2k+1\Leftrightarrow x\leq\frac{2}{2k+1}=\frac{1}{k+\frac{1}{2}}$$

On en déduit le graphe présenté en figure **??**.

c. D'après les définitions,

$$k\in D_n\Leftrightarrow\frac{n}{k}-\lfloor\frac{n}{k}\rfloor\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2n}{k}-2\lfloor\frac{n}{k}\rfloor\geq 1\Leftrightarrow\lfloor\frac{2n}{k}\rfloor+\{\frac{2n}{k}\}-2\lfloor\frac{n}{k}\rfloor\geq 1$$

$$\Leftrightarrow\varphi(\frac{k}{n})\geq 1-\{\frac{2n}{k}\}\Leftrightarrow\varphi(\frac{k}{n})>0\qquad(\text{car }\{x\}\in[0,1[)\Leftrightarrow\varphi(\frac{k}{n})=1$$

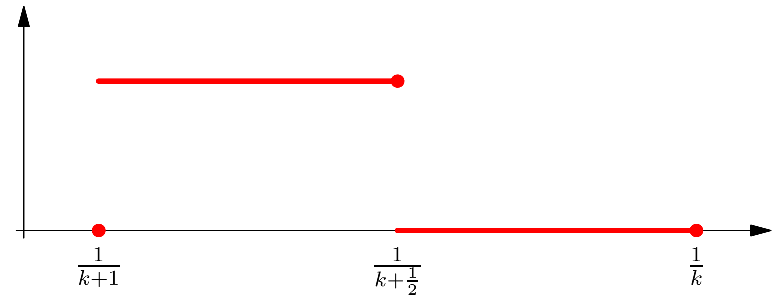

FIG. 1: Graphe de φ dans $\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]$

3. On calcule l'intégrale en utilisant la relation de Chasles et le graphe de la figure **??**

$$\int_{[\frac{1}{m},1]}\varphi=\sum_{k=1}^{m-1}\int_{[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}\varphi=\sum_{k=1}^{m-1}\left(\int_{[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k+\frac{1}{2}}]}\underbrace{\varphi}_{=1}+\int_{[\frac{1}{k+\frac{1}{2}},\frac{1}{k}]}\underbrace{\varphi}_{=0}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k'=2}^{m}\left(\frac{1}{k'-\frac{1}{2}}-\frac{1}{k'}\right)=\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k-\frac{1}{2}}-\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k}$$

4. a. On manipule l'expression obtenue pour l'intégrale en utilisant $\frac{1}{k-\frac{1}{2}}=\frac{2}{2k-1}$ et en dégageant le rôle des entiers pairs et impairs.

$$\int_{[\frac{1}{m},1]}\varphi=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2m-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$$

$$=2\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)\right]$$

$$-\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right)-1\right]$$

$$=2h_{2m}-2-2h_m+1=2h_{2m}-2h_m-1$$

b. En utilisant le développement donné par l'énoncé, il vient

$$\int_{[\frac{1}{m},1]}\varphi=2\left[\ln(2m)-\ln(m)+o(1)\right]-1=2\ln 2-1+o(1)\to 2\ln 2-1$$

Partie II. Sommes de Riemann

1. Regardons S_n comme l'intégrale d'une fonction en escalier $\overline{\psi}$ formée à partir des valeurs de ψ. La subdivision $\overline{\mathcal{S}}$ définissant $\overline{\psi}$ est constituée par les extrémités a et b et les $\frac{k}{n}$ dans l'intervalle $[a,b]$ (tirets dans la figure ??).
   La fonction $\overline{\psi}$ est nulle sur le premier intervalle (entre a et le tiret le plus à gauche).

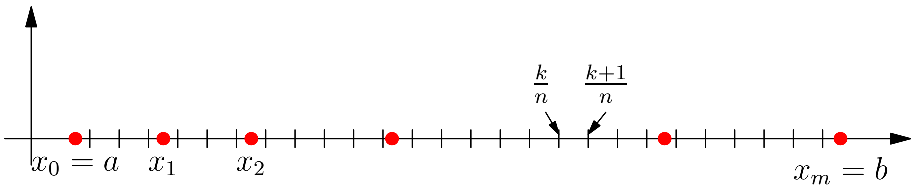

FIG. 2: Subdivisions $\mathcal{S}$ et $\overline{\mathcal{S}}$

   Sur chacun des intervalles suivants, la valeur est celle de ψ au tiret de gauche. Pour $\overline{\psi}$ ainsi définie, S_n est bien l'intégrale de $\overline{\psi}$ entre a et b.
   D'après l'hypothèse $\frac{1}{n} < \alpha$, la longueur d'un intervalle de $\overline{\mathcal{S}}$ est toujours plus petite que la longueur d'un intervalle de $\mathcal{S}$ (figure ??). La différence que l'on nous demande de majorer est la valeur absolue de l'intégrale de $\overline{\psi} - \psi$. On la découpe à l'aide de la relation de Chasles en une somme d'intégrales sur les intervalles $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ de $\overline{\mathcal{S}}$.
   Considérons un intervalle (ouvert) de $\overline{\mathcal{S}}$.
   S'il ne contient aucun des x_i alors ψ et $\overline{\psi}$ coïncident sur cet intervalle. Sur un tel intervalle les deux intégrales sont égales.
   Les seuls intervalles qui contribuent réellement sont donc ceux contenant un x_i. Il y en a au plus $m+1$ (le nombre de x_i), leur longueur est au plus $\frac{1}{n}$, la différence des fonctions ψ et $\overline{\psi}$ est majorée en valeur absolue par $2M$. On en déduit l'inégalité demandée.

2. a. On a vu en I.1.c. que $\varphi(\frac{k}{n}) = 1$ si et seulement si $k \in D_n$ et que la valeur de φ est nulle sinon. On en déduit que

$$\sharp D_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\frac{k}{n}) \Rightarrow d_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(\frac{k}{n})$$

   b. Pour obtenir l'inégalité demandée, on applique l'inégalité de la question II.1. à la fonction en escalier φ_m dans le segment $[\frac{1}{m}, 1]$. Précisons d'abord le nombre de points d'une subdivision adaptée à φ_m.
   D'après la question 2 de la partie I. Une subdivision adaptée est formée par les $\frac{1}{k}$ et les $\frac{1}{k+\frac{1}{2}}$ entre $\frac{1}{m}$ et 1.

$$\frac{1}{m} \leq \frac{1}{k} \leq 1 \Leftrightarrow k \in [\![1, m]\!], \qquad \frac{1}{m} \leq \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \leq 1 \Leftrightarrow k \in [\![0, m-1]\!].$$

   Le nombre total (qui est $s+1$ dans l'inégalité) de points de la subdivision adaptée à φ_m est donc $2m$.

3. Notons $l = 2\ln 2 - 1$. On va former une majoration valable pour des entiers $n > m$, l'entier m étant à priori arbitraire. On verra après comment le choisir en fonction d'un $\varepsilon > 0$ arbitraire pour valider la définition de la limite.

$$|d_n - l| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k \text{ tq } \frac{k}{n} < \frac{1}{m}} \varphi(\frac{k}{n})\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k \text{ tq } \frac{k}{n} \geq \frac{1}{m}} \varphi(\frac{k}{n}) - \int_{[\frac{1}{m},1]} \varphi\right| + \left|\int_{[\frac{1}{m},1]} \varphi - l\right|$$
$$\leq \frac{1}{n} \times \frac{n}{m} \times 1 + \frac{4m}{n} + \left|\int_{[\frac{1}{m},1]} \varphi - l\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{4m}{n} + \left|\int_{[\frac{1}{m},1]} \varphi - l\right|$$

On est alors en mesure de prouver la convergence.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un m vérifiant :

$$\frac{1}{m} \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad \left|\int_{[\frac{1}{m},1]} \varphi - l\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ce m étant fixé, la suite $\left(\frac{4m}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Il existe donc un N (que l'on prend $\geq m$) tel que

$$n \geq N \Rightarrow \frac{4m}{n} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On aura bien alors

$$n \geq N \Rightarrow |d_n - l| \leq \varepsilon.$$