On note respectivement $\lfloor x \rfloor$ et $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie entière et la partie fractionnaire d'un nombre réel. Dans tout le problème m, n, k désignent des entiers naturels non nuls. Pour tout entier naturel non nul n, on introduit un ensemble D_n et un nombre d_n :

$$D_n = \left\{ k \in [\![1, n]\!] \text{ tq } \{\frac{n}{k}\} \geq \frac{1}{2} \right\}, \qquad d_n = \frac{\sharp D_n}{n}$$

On peut interpréter d_n comme la *densité* de D_n dans $[\![1, n]\!]$.
L'objet de ce problème[1] est de montrer que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $2\ln 2 - 1$.

Partie I. Parties entières.

On définit une fonction φ dans $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0 : \ \varphi(x) = \lfloor \frac{2}{x} \rfloor - 2\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$$

Pour tout naturel non nul m, on définit φ_m comme la restriction de φ au segment $[\frac{1}{m}, 1]$.

1. Les fonctions φ et φ_m sont-elles continues par morceaux ? en escalier ? intégrables ?
2. a. Montrer que φ ne prend que les valeurs 0 ou 1.
   b. Pour un naturel k non nul, tracer le graphe de φ restreint à $[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$.
   c. Soit n fixé et $k \in \{1, \cdots, n\}$, montrer que $k \in D_n$ si et seulement si $\varphi(\frac{k}{n}) = 1$.
3. Montrer que
$$\int_{[\frac{1}{m},1]} \varphi = \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k}$$
4. On introduit une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on admet qu'il existe un réel γ (constante d'Euler) tel que
$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$$
   a. Exprimer $\int_{[\frac{1}{m},1]} \varphi$ en utilisant h_{2m} et h_m.
   b. Montrer que
$$\left(\int_{[\frac{1}{m},1]} \varphi \right)_{m\in\mathbb{N}^*} \to 2\ln 2 - 1$$

[1] d'après *Problems and Theorems in Analysis I* G. Pólya - G. Szegő (Springer) p55

Parties II. Sommes de Riemann.

1. Soit ψ une fonction en escalier définie sur un segment $[a, b]$ et M un majorant de $|\psi|$. Soit $\mathcal{S} = (x_0, \cdots, x_s)$ une subdivision adaptée à ψ qui n'est pas supposée régulière. On note α le plus petit des $x_{i+1} - x_i$ pour i entre 0 et $s - 1$.
Pour tout naturel n tel que $\frac{1}{n} < \alpha$, on introduit $\mathcal{I}_n$ et S_n :
$$\mathcal{I}_n = \left\{ k \in \mathbb{N} \text{ tq } a \leq \frac{k}{n} \leq b \right\}, \qquad S_n = \frac{1}{n} \sum_{k\in\mathcal{I}_n} \psi(\frac{k}{n}).$$
Montrer que
$$\left| S_n - \int_{[a,b]} \psi \right| \leq (s+1)\frac{2M}{n}.$$
2. a. Montrer que
$$d_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi(\frac{k}{n}).$$
   b. Soit m entier naturel non nul fixé, montrer que
$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k\geq\frac{n}{m}}^{n} \varphi(\frac{k}{n}) - \int_{[\frac{1}{m},1]} \varphi \right| \leq \frac{4m}{n}$$
3. Montrer que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $2\ln 2 - 1$.

Rémy Nicolai M1913E