Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.
Soit f un endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, $(A - I_4)^2$, $A^2(A - I_4)^2$.
2. On pose $N_1 = \ker f^2$ et $N_2 = \ker(f - \mathrm{id}_E)^2$.
   a. Calculer les dimensions de N_1 et N_2 et montrer qu'ils sont supplémentaires.
   b. Montrer que N_1 et N_2 sont stables par f, c'est à dire $f(N_1) \subset N_1$ et $f(N_2) \subset N_2$.
3. a. Montrer que $N_2 = \mathrm{Im}\, f^2$ et $N_1 = \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_E)^2$.
   b. Trouver une base $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ de E telle que

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{U}} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

1. Former une base du noyau et de l'image. Former une équation de l'image. L'image et le noyau sont-ils supplémentaires ?
2. Que vaut $u \circ u$?
3. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rémy Nicolai M1914E