Pb 1

1. On rappelle que $a \in [1, 2]$.
   a. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto e^{-at}$ à l'ordre 1 entre 0 et x.
$$e^{-ax} = 1 - ax + \int_0^x (x-t)(-a)^2 e^{-at}\,dt = 1 - ax + a^2 \int_0^x (x-t)e^{-at}\,dt$$
$$\Rightarrow \varphi(x) = a^2 \int_0^x (x-t)e^{-at}\,dt.$$
   Pour étudier le signe de φ, séparons les cas $x \geq 0$ et $x \leq 0$.
   Pour $x \geq 0$, $\varphi(x)$ est clairement positif car les bornes d'intégration sont dans le « bon sens » et $x - t \geq 0$ pour $t \in [0, x]$.
   Pour $x \leq 0$, on intervertit les bornes d'intégration :
$$\varphi(x) = -a^2 \int_x^0 (x-t)e^{-at}\,dt = a^2 \int_x^0 \underbrace{(t-x)}_{\geq 0} e^{-at}\,dt \geq 0.$$
   b. Interprétons l'hypothèse sur x :
$$x \geq -\frac{\ln 2}{a} \Leftrightarrow -ax \leq \ln 2 \Leftrightarrow e^{-ax} \leq 2.$$
   Introduisons cette inégalité pour majorer l'intégrale. Dans le cas $x \geq 0$,
$$0 \leq \varphi(x) \leq a^2 \int_0^x (t-x) 2\,dt = a^2 x^2.$$
   Le calcul est analogue dans le cas $x \leq 0$. Comme tout est posifif, on écrit l'inégalité avec des valeurs absolues avant de diviser par x.
$$0 \leq \varphi(x) \leq a^2 x^2 \Rightarrow |\varphi(x)| \leq a^2 |x|^2 \Rightarrow 0 \leq \left| \frac{\varphi(x)}{x} \right| \leq a^2 |x|.$$
2. a. Avec les définitions,
$$h(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + 0^2 = \frac{\pi}{4}.$$
   b. Utilisons le changement de variable $u = xt$. Alors $du = x\,dt$ et
$$\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt = \int_0^x e^{-u^2} \frac{du}{x} = \frac{1}{x}\lambda(x) \Rightarrow \lambda(x) = x \int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt.$$
   c. Avec la formule de dérivation admise en 1. et le résultat de la question précédente,
$$h'(x) = 2xf'(x^2) + 2\lambda'(x)\lambda(x)$$
$$= -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt + 2e^{-x^2} x \int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt = 0.$$
   La fonction h est donc constante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ de valeur $\frac{\pi}{4}$.
   d. La fonction à intégrer est positive. Avec $x > 0$, on majore grossièrement en t
$$1 + t^2 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x(1+t^2)} \leq e^{-x} \\ \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \int_0^1 e^{-x}\,dt = e^{-x}.$$
   On en déduit que $f \to 0$ en $+\infty$.
   e. On passe à la limite en $+\infty$ dans la relation tirée de 2.c.
$$\frac{\pi}{4} = \underbrace{f(x^2)}_{\to 0} + \lambda(x)^2 \Rightarrow \lambda(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4} - f(x^2)} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pb 2

Partie I. Exemple.

1. Par définition, $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f si et seulement si $f - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas injective ce qui est équivalent à $\operatorname{rg}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) < 3$. La discussion du rang permet de former des polynômes dont les racines sont les valeurs propres. On transforme les matrices par opérations élémentaires.
$$A - \lambda I_3 \xrightarrow{\text{mult } -1} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3} \begin{pmatrix} 2+\lambda & 1 & 1 \\ 2+\lambda & \lambda & 1 \\ 2+\lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}} \begin{pmatrix} 2+\lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{spectre de } a = \{-2, 1\}$$

$$B-\lambda I_3 \xrightarrow{\text{perm } L_1L_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3-\lambda & -3 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-(3-\lambda)L_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 6-3\lambda & -4+4\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-3L_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda-2)^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{spectre de } b=\{2\}$$

2. Le calcul matriciel conduit à $AU_1=U_1$, $AU_2=U_2$, $AU_3=-2U_3$. On en déduit que les trois vecteurs de $\mathcal{F}$ sont propres pour a avec $a(u_1)=u_1$, $a(u_2)=u_2$, $a(u_3)=-2u_3$.
Pour montrer que $\mathcal{F}$ est une base, on montre qu'elle est génératrice en prouvant que le rang de la matrice de (u_3,u_2,u_1) dans $\mathcal{E}$ est 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{cases} L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1 \end{cases}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \text{rg}=3$$

Aucun de ces vecteurs n'est propre pour b car

$$BU_1=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \text{Vect}(U_1),\; BU_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \notin \text{Vect}(U_2),\; BU_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{Vect}(U_3)$$

3. On forme la matrice de $b-2\,\text{Id}_E$ dans la base $\mathcal{E}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Il apparait clairement que la famille constituée de la première colonne est une base l'espace vectoriel engendré par les trois colonnes. Cette première colonne est la matrice de u_4 dans $\mathcal{E}$. On en déduit que $\text{Im}(b-2\,\text{Id}_E)=\text{Vect}(u_4)$. Le théorème du rang entraine que $\dim(\ker(b-2\,\text{Id}_E))=2$.
On remarque sur la matrice que la ligne 1 engendre l'espace des lignes. On en déduit que cette ligne seule forme une équation du noyau. Un vecteur de coordonnées (x,y,z) dans $\mathcal{E}$ est dans $\ker(b-2\,\text{Id}_E)$ si et seulement si $x-3y-1=0$.

4. Formons les équations caractérisant qu'un vecteur u de coordonnées (x,y,z) dans $\mathcal{E}$ est dans $\ker(a-\text{Id}_E)\cap\ker(b-2\,\text{Id}_E)$; certaines de ces équations se répètent. Il reste :

$$\begin{cases} x-3y-z=0 \\ -x-y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y-z=0 \\ -4y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=-2y \end{cases}$$

On en déduit que $u\in\ker(a-\text{Id}_E)\cap\ker(b-2\,\text{Id}_E)$ si et seulement si $u\in\text{Vect}(u_5)$ de la forme $u=y(e_1+e_2-2e_3)=yu_5$.
Tous les vecteurs non nuls de $\text{Vect}(u_5)$ sont des vecteurs propres communs aux endomorphismes a et b.
Comme le spectre de b se réduit à 2, les seuls autres vecteurs propres possibles sont dans $\ker(a+2\,\text{Id}_E)\cap\ker(b-2\,\text{Id}_E)$. Un vecteur u de coordonnées (x,y,z) est dans cette intersection si et seulement si

$$\begin{cases} x-3y-z=0 \\ 2x-y-z=0 \\ -x+2y-z=0 \\ -x-y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y-z=0 \\ 5y+z=0 \\ -y+2z=0 \\ -4y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$$

Il n'y a donc pas d'autres vecteurs propres communs.

Partie II. Exemple avec des polynômes.

1. a. Les définitions des endomorphismes a et b conduisent aux matrices suivantes dans la base canonique $(1,X,X^2)$:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   b. En calculant, il vient

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [A,B]=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [A^2,B]=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   On lit clairement sur leurs colonnes que $[A,B]$ et $[A^2,B]$ sont de rang 2.

2. Valeurs et vecteurs propres de a.

a. Soit λ une valeur propre de a. Il existe alors un polynôme P non nul tel que $P' = \lambda P$. À cause du degré, cela n'est possible que si $\lambda = 0$ et P de degré 0. La seule valeur propre de a est donc 0, les seuls vecteurs propres de a sont les polynômes de degré 0.

b. Pour i entre 2 et $2n$, $a^i(P) = P^{(i)}$. La seule valeur propre de a^i est donc encore 0, les vecteurs propres sont tous les polynômes non nuls de degré strictement plus petit que i.

3. Valeurs et vecteurs propres de b.

a. Par définition $b(X^k) = X^{2n-k}$ pour k entre 0 et $2n$. On en déduit que $b \circ b$ coïncide avec l'identité sur les vecteurs de la base canonique d'où $b \circ b = \mathrm{Id}_E$. Si λ est un vecteur propre, il existe un polynôme non nul P tel que $b(P) = \lambda P$. En composant, il vient $P = b \circ b(P) = \lambda b(P) = \lambda^2 P$ d'où $\lambda^2 = 1$ car P n'est pas le polynôme nul. Les deux seules valeurs propres possibles sont donc 1 ou -1.

b. Rappelons la notion de *valuation* d'un polynôme non nul qui est en quelque sorte symétrique de celle de degré. Un polynôme P est de valuation v et de degré d lorsqu'il s'écrit

$$P = a_v X^v + a_{v+1} X^{v+} + \cdots + a_d X^d \text{ avec } v \leq d \text{ et } a_v \neq 0 \text{ et } a_d \neq 0$$

Prendre l'image par b échange valuation et degré :

$$b(P) = a_d X^{2n-d} + \cdots a_v X^{2n-v}$$

Si P est un vecteur propre, on doit donc avoir

$$d = 2n - v \Rightarrow 2n = v + d \Rightarrow 2n \leq 2d \text{ (car } v \leq d) \;\Rightarrow d \geq n$$

c. Les polynômes proposés exploitent la symétrie sous-jacente dans la définition de b. On obtient des vecteurs propres

$$b(X^n) = X^n, \qquad \forall k \in \{1, \cdots n\} \begin{cases} b(X^{n-k} + X^{n+k}) = X^{n-k} + X^{n+k} \\ b(-X^{n-k} + X^{n+k}) = -\left(-X^{n-k} + X^{n+k}\right) \end{cases}$$

4. D'après les questions 2b et 3b, si $i \leq n$, les conditions sur les degrés sont contradictoires et il ne peut exister de vecteurs propres communs à a et b.
Si $i > n$, la question 3c fournit des exemples de polynômes de degré strictement plus petit que i qui sont propres pour b. Il existe donc des vecteurs propres communs dans ce cas.
En conclusion, il existe des vecteur propres communs à a^i et b si et seulement si $i > n$.

Partie III. Condition nécessaire. Conditions suffisantes.

1. Si a et b admettent un vecteur propre commun x avec $a(x) = \lambda x$ et $b(x) = \mu x$, alors

$$[a, b](x) = a(b(x)) - b(a(x)) = \mu a(x) - \lambda b(x) = (\mu\lambda - \lambda\mu)x = 0_E$$

Le noyau du crochet contient un vecteur non nul, donc le rang du crochet est strictement plus petit que la dimension de l'espace d'après le théorème du rang.
Qu'en est-il de la réciproque ? Si deux endomorphismes ont un crochet dont le rang est strictement plus petit que la dimension de l'espace, ont-ils forcément un vecteur propre commun ?
L'exemple de la partie II montre que non. Pour $n = 1$, l'espace est de dimension 3. .On sait, d'après la dernière question de la partie II, que a et b ne peuvent avoir de vecteurs propres communs mais on a calculé au début que le rang de $[a, b] = 2$.

2. a. Si le crochet est l'application nulle, son noyau est E et contient tout. La propriété $\mathcal{H}$ est donc vérifiée.

b. On doit montrer que $\ker(a - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par b. Pour tout vecteur y dans cet espace,

$$\begin{aligned}(a - \lambda \mathrm{Id}_E)(b(y)) = a \circ b(y) - \lambda b(y) &= a \circ b(y) - b \circ a(y) + b \circ a(y) - \lambda b(y) \\ &= [a, b](y) + b \circ (a - \lambda \mathrm{Id}_E)(y) = 0_E\end{aligned}$$

Le deuxième terme étant nul car $y \in \ker(a - \lambda \mathrm{Id}_E)$ et le premier car $y \in \ker(a - \lambda \mathrm{Id}_E) \subset \ker([a, b])$ qui est supposé par l'énoncé.
Cette stabilité montre que la restriction de b est un endomorphisme du $\mathbb{C}$ espace vectoriel $\ker(a - \lambda \mathrm{Id}_E)$. D'après la propriété que l'énoncé en début de cette partie nous permet d'utiliser sans justification, il admet une valeur propre μ donc un vecteur propre qui sera un vecteur propre aussi pour a car dans l'espace $\ker(a - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

3. Dans un espace de dimension 1, tout vecteur non nul est vecteur propre pour n'importe quel endomorphisme. Tout couple d'endomorphismes admet donc des vecteurs propres communs. La proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie.

4. Dans cette question, $(a, b) \in \mathcal{L}(E)^2$ *ne vérifie pas la propriété* $\mathcal{H}$. On note $c = [a, b]$. On suppose $rg(c) = 1$ et on considère une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de a.

a. Par hypothèse, le couple (a, b) ne vérifie pas la propriété $\mathcal{H}$. Cela signifie que, pour n'importe quelle valeur propre λ de a, il existe un vecteur u tel que $u \in \ker(a - \lambda \mathrm{Id}_E)$ (c'est à dire $a(u) = \lambda u$) et $u \notin \ker([a, b])$ (c'est à dire $c(u) = [a, b](u) \neq 0_E$).

b. On pose $v = c(u)$, c'est un vecteur non nul de $\operatorname{Im}(c)$. Comme par hypothèse, le rang de c est 1, on peut en déduire que $\operatorname{Im}(c) = \operatorname{Vect}(v)$.
Montrons que $v \in \operatorname{Im}(a - \lambda \operatorname{Id}_E)$, on en déduira que $\operatorname{Im}(c) \subset \operatorname{Im}(a - \lambda \operatorname{Id}_E)$.

$$\begin{aligned} v = c(u) = (a \circ b)(u) - (b \circ a)(u) = a(b(u)) - \lambda b(u) \\ = (a - \lambda \operatorname{Id}_E)(b(u)) \in \operatorname{Im}(a - \lambda \operatorname{Id}_E) \end{aligned}$$

c. Il est évident que $\operatorname{Im}(a - \lambda \operatorname{Id}_E)$ est stable par a. Pour montrer la stabilité par b, considérons un x quelconque dans $\operatorname{Im}(a - \lambda \operatorname{Id}_E)$. Il existe un y tel que $x = a(y) - \lambda y$. On en déduit,

$$\begin{aligned} b(x) = (b \circ a)(y) - \lambda b(y) = -[a, b](y) + (a \circ b)(y) - \lambda b(y) \\ = \underbrace{-[a, b](y)}_{\in \operatorname{Im}(c) \subset \operatorname{Im}(a - \lambda \operatorname{Id}_E)} + (a - \lambda \operatorname{Id}_E)(b(y)) \in \operatorname{Im}(a - \lambda \operatorname{Id}_E) \end{aligned}$$

5. On démontre les propositions $\mathcal{P}_n$ par récurrence. On a vu que $\mathcal{P}_1$ est vraie. On veut montrer l'implication $\mathcal{P}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{P}_n$.
On considère donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n avec deux endomorphismes a, b tels que $\operatorname{rg}([a, b]) = 1$.
 - Si le couple (a, b) vérifie la propriété $\mathcal{H}$, la question 2. montre que a et b ont un vecteur propre en commun.
 - Si le couple (a, b) ne vérifie pas la propriété $\mathcal{H}$, il existe (question 4) une valeur propre λ de a telle que

$$\operatorname{Im}(a - \lambda \operatorname{Id}_E) \text{ stable par } a \text{ et } b$$

 Notons V ce sous-espace et a_V, b_V les restrictions à V de a et b. Il est clair que le crochet des restrictions est la restriction du crochet et que restreindre diminue le rang. On en déduit

$$\operatorname{rg}([a_V, b_V]) \leq 1$$

 - Si $[a_V, b_V] = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on se retrouve dans les conditions de la question 2. Le couple de restrictions vérifie la propriété $\mathcal{H}$ ce qui entraine qu'elles admettent un vecteur propre commun.
 - Si le rang est 1. On peut utiliser l'hypothèse de récurrence, les deux restrictions admettent un vecteur propre commun donc le endomorphismes a et b aussi.

Deux endomorphismes peuvent admettre un vecteur propre commun sans que le rang du crochet soit inférieur ou égal à 1. La partie II en fournit un exemple : a^2 et b ont un vecteur propre commun bien que le rang du crochet soit 2.