

Pb 1

Définissons diverses fonctions dans \mathbb{R} . Pour tout réel x :

$$\lambda(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt, \quad g(x) = \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt$$

Notons que λ est l'unique primitive de $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t^2}$ s'annulant en 0.

Le but de cet exercice est de démontrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{intégrale de Gauss})$$

1. Soit $a \in [1, 2]$. Définissons une fonction φ dans \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = e^{-ax} - 1 + ax.$$

On pourra utiliser une formule de Taylor à préciser.

a. Montrer que φ est à valeurs positives sur \mathbb{R} .

b. Montrer que pour tout x réel :

$$x \geq -\frac{\ln(2)}{a} \Rightarrow \varphi(x) \leq a^2 x^2 \Rightarrow \left| \frac{e^{-ax} - 1}{x} + a \right| \leq a^2 |x| \text{ pour } x \neq 0.$$

Ces inégalités permettent de montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = -g(x).$$

Cette propriété est *admise* et sera utile dans la fin du problème.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, posons :

$$h(x) = f(x^2) + \lambda(x)^2.$$

a. Calculer $h(0)$.

b. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$\lambda(x) = x \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt.$$

c. En déduire que h est constante sur \mathbb{R}_+ .

d. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

e. Montrer enfin que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pb 2

Dans ce problème, \mathbf{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

On rappelle les définitions des valeurs propres et des vecteurs propres d'un endomorphisme. Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

– Une *valeur propre* de f est un élément λ de \mathbf{K} pour lequel il existe un vecteur *non nul* x de E tel que $f(x) = \lambda x$. Le *spectre* de f est l'ensemble de ses valeurs propres.

– Un *vecteur propre* de f est un vecteur non nul x de E pour lequel il existe un $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$.

L'objet de ce problème¹ est d'étudier les vecteurs propres *communs* à deux endomorphismes. Par définition, un vecteur x est un vecteur propre commun aux endomorphismes f et g si et seulement il est non nul et s'il existe λ et μ dans \mathbf{K} tels que $f(x) = \lambda x$ et $g(x) = \mu x$.

On utilise aussi le *crochet* : $[f, g] = f \circ g - g \circ f$ de deux endomorphismes f et g de $\mathcal{L}(E)$ ou de deux matrices carrées $[A, B] = AB - BA$.

Partie I. Exemple.

Dans cette partie, $\mathbf{K} = \mathbb{R}$, on considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On considère aussi un \mathbb{R} -espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$. On définit les endomorphismes a, b, c, d dans $\mathcal{L}(E)$ et les vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 par les relations

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(a) = A, \quad \text{Mat}_{\mathcal{E}}(b) = B, \quad \text{Mat}_{\mathcal{E}}(c) = C, \quad \text{Mat}_{\mathcal{E}}(d) = D,$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u_1) = U_1, \quad \dots, \quad \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u_5) = U_5.$$

On note $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$.

¹d'après CCP 2013 MP maths1

1. En discutant selon $\lambda \in \mathbb{R}$ du rang de $A - \lambda I_3$ puis de $B - \lambda I_3$, déterminer les spectres de a et de b .
2. Vérifier que la famille \mathcal{F} est une base de E formée de vecteurs propres de a . Montrer qu'aucun élément de \mathcal{F} n'est un vecteur propre commun à a et b .
3. Montrer que $\text{Im}(b - 2\text{Id}_E) = \text{Vect}(u_4)$ et que $\dim(\ker(b - 2\text{Id}_E)) = 2$.
4. Montrer que $\ker(a - \text{Id}_E) \cap \ker(b - 2\text{Id}_E) = \text{Vect}(u_5)$ et déterminer tous les vecteurs propres communs à a et b .

Partie II. Exemple avec des polynômes.

Dans cette partie $E = \mathbb{C}_{2n}[X]$. On définit des applications a et b par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_{2n}[X], \quad a(P) = P', \quad b(P) = X^{2n} \widehat{P}\left(\frac{1}{X}\right).$$

Ces applications sont des endomorphismes de E , on ne demande pas de le vérifier.

1. Dans le cas particulier $n = 1$.
 - a. Former les matrices A et B des endomorphismes a et b dans la base canonique $(1, X, X^2)$.
 - b. Calculer $[A, B]$ et $[A^2, B]$ puis leurs rangs.
2. Valeurs propres et vecteurs propres de a .
 - a. Montrer que a admet une unique valeur propre λ à déterminer. Quels sont les vecteurs propres de a ?
 - b. Soit i entier entre 2 et $2n$. Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de $a^i = a \circ \dots \circ a$?
3. Valeurs propres et vecteurs propres de b .
 - a. Que vaut $b \circ b$? Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de b ?
 - b. Montrer que si P est un vecteur propre de b alors $\deg(P) \geq n$.
 - c. Calculer les images par b de X^n et des polynômes $X^{n-k} + X^{n+k}$ et $-X^{n-k} + X^{n+k}$ pour k entier entre 1 et n .
4. Vecteurs propres communs. Pour quel entiers i entre 1 et $2n$, les endomorphismes a^i et b ont-ils des vecteurs propres communs ?

Partie III. Condition nécessaire. Conditions suffisantes.

On pourra utiliser sans démonstration que tout endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie admet au moins une valeur propre.

Dans toute cette partie (sauf dans la question 1), E désigne un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

On dit que le couple $(a, b) \in \mathcal{L}(E)^2$ vérifie la propriété \mathcal{H} si et seulement si il existe une valeur propre λ de a telle que $\ker(a - \lambda \text{Id}_E) \subset \ker([a, b])$.

Pour tout naturel non nul k , on note \mathcal{P}_k la proposition suivante :

Pour tout \mathbb{C} -espace vectoriel V tel que $\dim(V) \leq k$ et tout couple d'endomorphismes $(\varphi, \psi) \in \mathcal{L}(V)^2$ tels que $\text{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$, il existe un vecteur propre commun à φ et ψ .

1. Dans cette question, E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie (avec \mathbf{K} égal \mathbb{R} ou \mathbb{C}) et $(a, b) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer que si a et b admettent un vecteur propre commun alors $\text{rg}([a, b]) < \dim(E)$. Que penser de la réciproque ?
2. Soit a et b deux endomorphismes de E .
 - a. Montrer que si $[a, b] = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors (a, b) vérifie la propriété \mathcal{H} .
 - b. On suppose ici que (a, b) vérifie la propriété \mathcal{H} avec $\ker(a - \lambda \text{Id}_E) \subset \ker([a, b])$. Montrer que $\ker(a - \lambda \text{Id}_E)$ est stable pour b . En déduire l'existence d'un vecteur propre commun à a et b .
3. Démontrer la proposition \mathcal{P}_1 .
4. Dans cette question, on considère $(a, b) \in \mathcal{L}(E)^2$ qui ne vérifie pas la propriété \mathcal{H} . On note $c = [a, b]$, on suppose que $\text{rg}(c) = 1$ et on considère une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de a .
 - a. Justifier l'existence d'un $u \in E$ tel que $a(u) = \lambda u$ et $c(u) \neq 0$.
 - b. Montrer que $\text{Im}(c) = \text{Vect}(v)$ où $v = c(u)$. En déduire que $\text{Im}(c) \subset \text{Im}(a - \lambda \text{Id}_E)$.
 - c. Montrer que $\text{Im}(a - \lambda \text{Id}_E)$ est stable par a et b .
5. Montrer que la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tous les naturels non nuls n . Si deux endomorphismes ont un vecteur propre commun, leur crochet est-il de rang au plus 1 ?