1. Soit $E = \{a, b, c, d\}$ l'ensemble à 4 éléments dont on forme les partitions. Les nombres cherchés sont respectivement 1, 7, 6, 1. En effet :
   - Une seule partition en une seule partie : $\{E\}$
   - Sept partitions en deux parties :
   $$\{\{b,c,d\},\{a\}\},\{\{a,c,d\},\{b\}\},\ \{\{a,b,d\},\{c\}\},\ \{\{a,b,c\},\{d\}\},\ \{\{a,b\},\{c,d\}\},\ \{\{a,c\},\{b,d\}\},\ \{\{a,d\},\{b,c\}\}$$
   - Six partitions en trois parties :
   $$\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\},\ \{\{a,c\},\{b\},\{d\}\},\ \{\{a,d\},\{b\},\{c\}\},\ \{\{b,c\},\{a\},\{d\}\},\ \{\{b,d\},\{a\},\{c\}\},\ \{\{c,d\},\{a\},\{b\}\}$$
   - Une seule partition en quatre éléments constituée des singletons :
   $$\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$$
2. a. Les k éléments de $\pi(f)$ sont des parties de A. On doit montrer qu'ils constituent une partition de A c'est à dire que tout $x \in A$ est dans l'une de ces parties et que deux parties distinctes sont disjointes.
   Soit $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$ donc il existe un i tel que $f(x) = y_i$ ce qui entraine $x \in f^{-1}(\{y_i\})$.
   Soit y_i et y_j distincts, alors :
   $$\left.\begin{aligned} x \in f^{-1}(\{y_i\}) \Rightarrow f(x) = y_i \\ x' \in f^{-1}(\{y_j\}) \Rightarrow f(x') = y_j \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \neq x'$$
   car $y_i \neq y_j$ donc $f^{-1}(\{y_i\}) \cap f^{-1}(\{y_j\}) = \emptyset$.
   On pourrait aussi remarquer que les $f^{-1}(\{y_i\})$ sont les classes d'équivalence de la relation définie par f :
   $$x \mathcal{R}_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

   b. Soit $\mathcal{P} = \pi(f)$ la partition en k parties associée à f. Quelles sont les $f \in \mathcal{F}_k$ telles que $\mathcal{P} = \pi(f)$?
   Sur chaque élément de $\mathcal{P}$ (un tel élément est une partie de A), les fonctions f et g sont constantes mais elles ne prennent pas forcément la même valeur. D'autre part ces k valeurs sont deux à deux distinctes. Le nombre de ces fonctions est donc le même que le nombre de k-uplets d'éléments de X deux à deux distincts c'est à dire encore le nombre d'injections d'un ensemble à k éléments dans un ensemble à m éléments. Sot d'après le cours
   $$m(m-1)\cdots(m-k+1) = m^{\underline{k}}$$
3. On classe d'abord l'ensemble des fonctions de A dans X suivant le cardinal de l'image de A. Ce cardinal est compris entre 0 et $\min(m, n)$. D'après le cours, on connait le nombre total de ces fonctions. Il vient
   $$m^n = \sum_{k=1}^{\min(m,n)} \sharp\mathcal{F}_k$$
   On classe ensuite les f d'un même $\mathcal{F}_k$ suivant leur $\pi(f)$. Le nombre de partitions est $\left\{ n \atop k \right\}$. Pour chaque partition $\mathcal{P}$, le nombre de f telles que $\pi(f) = \mathcal{P}$ est $m^{\underline{k}}$. On en déduit la formule demandée.
   $$\sharp\mathcal{F}_k = \left\{ n \atop k \right\} n^{\underline{k}} \Rightarrow m^n = \sum_{k=1}^{\min(m,n)} \left\{ n \atop k \right\} m^{\underline{k}}$$

Cette création est mise à disposition selon le Contrat
Paternité-Partage des Conditions Initiales à l'Identique 2.0 France
disponible en ligne http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/