Soient k, m, n trois entiers naturels non nuls avec $k \leq m$ et $k \leq n$.
On note $m^{\underline{k}}$ le produit de k entiers consécutifs décroissants à partir de m

$$m^{\underline{k}} = \underbrace{m(m-1)\cdots}_{k \text{ facteurs}} = m(m-1)\cdots(m-k+1)$$

On dira que $m^{\underline{k}}$ est une *puissance descendante* de m.
On note $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k parties non vides.
Par exemple $\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} = 3$ car les partitions de $\{a, b, c\}$ en deux parties non vides sont

$$\{\{a,b\},\{c\}\}, \qquad \{\{b,c\},\{a\}\}, \qquad \{\{c,a\},\{b\}\}$$

1. En précisant dans chaque cas l'ensemble des partitions à considérer, calculer

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

2. Soit A et X deux ensembles, respectivement de cardinal n et m, soit k entier entre 1 et $\min(m, n)$. On note
   - Π_k : l'ensemble des partitions de A en k parties non vides.
   - $\mathcal{F}_k$: l'ensemble des fonctions de A dans X telles que $\sharp(f(A)) = k$.

   a. Soit $f \in \mathcal{F}_k$ et $f(A) = \{y_1, y_2, \cdots, y_k\}$. On note

   $$\pi(f) = \left\{ f^{-1}(\{y_i\}), i \in \{1, \cdots, k\} \right\}$$

   Montrer que $\pi(f) \in \Pi_k$ c'est à dire une partition de A en k parties non vides.

   b. Soit $f \in \mathcal{F}_k$. Quel est le cardinal de l'ensemble des $g \in \mathcal{F}_k$ telles que $\pi(g) = \pi(f)$?

3. Montrer que

$$m^n = \sum_{k=1}^{\min(m,n)} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} m^{\underline{k}}$$