

PARTIE I

Notons \mathcal{A} (respectivement \mathcal{B} et \mathcal{C}) l'événement A (resp. B , C) réussit son tir à une épreuve donnée.

1. Calcul de probabilités.

a. D'après le cours :

$$P(U \cup V) = P(U) + P(V) - P(U \cap V)$$

b. On cherche la probabilité de $\bar{\mathcal{A}} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$.

$$\begin{aligned} P(\bar{\mathcal{A}} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})) &= P((\bar{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B}) \cup (\bar{\mathcal{A}} \cap \mathcal{C})) = P(\bar{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B}) + P(\bar{\mathcal{A}} \cap \mathcal{C}) - P(\bar{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \quad (\text{d'après a}) \\ &= P(\bar{\mathcal{A}})P(\mathcal{B}) + P(\bar{\mathcal{A}})P(\mathcal{C}) - P(\bar{\mathcal{A}})P(\mathcal{B})P(\mathcal{C}) \quad (\text{par indépendance des tirs}) \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

c. On cherche la probabilité de $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$. On trouve de même

$$\begin{aligned} P(\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})) &= P((\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C})) = P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) + P(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) - P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \\ &= P(\mathcal{A})P(\mathcal{B}) + P(\mathcal{A})P(\mathcal{C}) - P(\mathcal{A})P(\mathcal{B})P(\mathcal{C}) \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

2. Détermination de probabilités conditionnelles

a. Tant qu'aucun des tireurs n'est éliminé, à chaque étape A vise B , B et C visent A . Le tireur C n'est pas visé et ne peut donc pas être éliminé avant A ou B . L'événement AB_n est donc impossible.

b. $ABC_{n+1} \cap ABC_n$ est événement ABC_n et « A , B et C ratent leur tir à l'étape n ». Par indépendance des tirs on a donc

$$p(ABC_{n+1}|ABC_n) = p(\bar{\mathcal{A}})p(\bar{\mathcal{B}})p(\bar{\mathcal{C}}) = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

c. Comme, tant qu'aucun des tireurs n'est éliminé à chaque étape A vise B , B et C visent A . L'événement $BC_{n+1} \cap ABC_n$ est événement ABC_n inter l'événement " A rate son tir et B ou C réussissent leur tir à l'étape n ". Par indépendance des tirs on a donc

$$p(BC_{n+1}|ABC_n) = p(\bar{\mathcal{A}} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})) = \frac{2}{9} \quad \text{par 1b)}$$

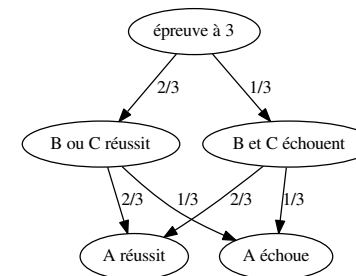


FIG. 1: probabilités conditionnelles

De même

$$p(CA_{n+1}|ABC_n) = p(\mathcal{A} \cap \bar{\mathcal{B}} \cap \bar{\mathcal{C}}) = \frac{2}{9}$$

d. – Si A , B , C ne sont pas éliminés, personne ne vise C , C ne peut donc pas être éliminé. D'où

$$p(A_{n+1}|ABC_n) = 0 \quad \text{et} \quad p(B_{n+1}|ABC_n) = 0$$

– Comme dans la question précédente

$$p(C_{n+1}|ABC_n) = p(\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})) = \frac{4}{9} \quad \text{par 1c)}$$

e. Si à une étape il reste A et C alors A vise sur C et C vise sur A . L'événement $A_{n+1} \cap CA_n$ est donc l'événement CA_n inter l'événement " A rate son tir et C réussit son tir à l'étape n ". Par indépendance des tirs, on a donc

$$p(A_{n+1}|CA_n) = p(\mathcal{A} \cap \bar{\mathcal{C}}) = \frac{4}{9}$$

De même

$$p(B_{n+1}|BC_n) = p(\mathcal{B} \cap \bar{\mathcal{C}}) = \frac{1}{3} \quad p(C_{n+1}|CA_n) = p(\mathcal{C} \cap \bar{\mathcal{A}}) = \frac{1}{9}$$

et

$$p(C_{n+1}|BC_n) = p(\mathcal{C} \cap \bar{\mathcal{B}}) = \frac{1}{6}$$

f. On a toujours, si A, B, C ne sont pas éliminés, personne ne vise C, C ne peut donc pas être éliminé, d'où

$$p(\emptyset_{n+1}|ABC_n) = 0$$

D'autre part,

$$p(\emptyset_{n+1}|BC_n) = p(B \cap C) = \frac{1}{6} \quad p(\emptyset_{n+1}|CA_n) = p(C \cap A) = \frac{2}{9}$$

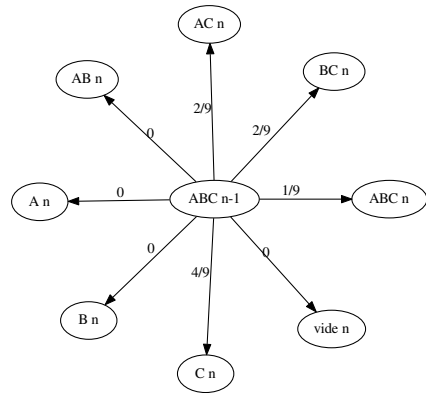


FIG. 2: issues épreuve à 3

3. Nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles s'achève le combat.

a. L'événement T_1 est l'union disjointe des événements $A_1, B_1, C_1, \emptyset_1$. La probabilité des événements $A_1, B_1, C_1, \emptyset_1$ a été calculé en d) et e) en prenant $n = 0$ et en utilisant que ABC_0 est l'événement certain. On trouve donc

$$p(T_1) = p(A_1) + p(B_1) + p(C_1) + p(\emptyset_1) = 0 + 0 + \frac{4}{9} + 0 = \frac{4}{9}$$

b. Soit $n \geq 2$. Remarquons que pour $0 \leq k \leq n$

$$ABC_0 \cap ABC_1 \cap \dots \cap ABC_{k-1} \cap ABC_k = ABC_k$$

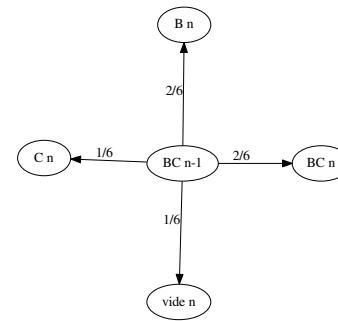


FIG. 3: issues épreuve avec BC

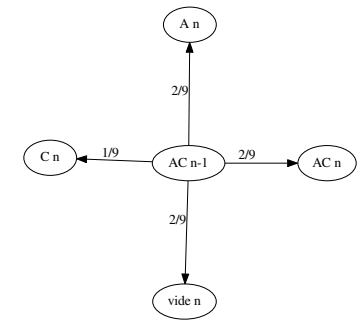


FIG. 4: issues épreuve avec AC

D'où, par la question 2b.,

$$\begin{aligned} p(ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_{n-1} \cap ABC_n) \\ = p(ABC_1|ABC_0)p(ABC_2|ABC_1) \dots p(ABC_n|ABC_{n-1}) = \frac{1}{9^n} \end{aligned}$$

c. Soit $n \geq 2$ et soit $0 \leq k \leq n - 1$, on trouve de même :

$$\begin{aligned} p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n) \\ = p(ABC_1|ABC_0) \dots p(ABC_k|ABC_{k-1})p(CA_{k+1}|ABC_k) \\ p(CA_{k+2}|CA_{k+1}) \dots p(CA_n|CA_{n-1}) \\ = \left(\frac{1}{9}\right)^k \frac{2}{9} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k-1} = \frac{2^{n-k}}{9^n} \end{aligned}$$

d. Soit $n \geq 2$ et soit $0 \leq k \leq n - 1$:

$$\begin{aligned} p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_n) \\ = p(ABC_1|ABC_0) \dots p(ABC_k|ABC_{k-1})p(BC_{k+1}|ABC_k) \\ p(BC_{k+2}|BC_{k+1}) \dots p(BC_n|BC_{n-1}) \\ = \left(\frac{1}{9}\right)^k \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1} = \frac{2}{3^{n+k+1}} \end{aligned}$$

e. Soit $n \geq 2$. Notons $T_{>n}$ l'événement étudié. Le combat n'est pas fini à l'issue de la n -ième épreuve si à l'issue de la n -ième épreuve il reste deux ou trois tireurs. $T_{>n}$ est la réunion disjointe de ABC_n , AB_n (qui est l'événement impossible), CA_n et BC_n .

D'autre part,

- CA_n est l'union disjointe des événements $ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n$, pour $0 \leq k \leq n - 1$

- BC_n est l'union disjointe des événements $ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_n$, pour $0 \leq k \leq n - 1$.

D'où, d'après les questions b), c) et d)

$$\begin{aligned} p(T_{>n}) &= \frac{1}{9^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{n-k}}{9^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{3^{n+k+1}} \\ &= \frac{1}{9^n} + \frac{2^{n+1} - 2}{9^n} + \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{9^n}\right) = \frac{2^{n+1} + 3^n - 2}{9^n} \end{aligned}$$

On a $T_{>n-1}$ est l'union disjointe de T_n et $T_{>n}$. Donc

$$p(T_n) = p(T_{>n-1}) - p(T_{>n}) = \frac{2^n + 3^{n-1} - 2}{9^{n-1}} - \frac{2^{n+1} + 3^n - 2}{9^n}$$

Pour $n = 1$, $\frac{2^n + 3^{n-1} - 2}{9^{n-1}} - \frac{2^{n+1} + 3^n - 2}{9^n} = \frac{4}{9}$ ce qui correspond à la probabilité de T_1 .

f. Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $t_k = \frac{2^{k+1} + 3^k - 2}{9^k}$.

Soit $n \geq 1$. D'après la formule précédente (valable dès $k = 1$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n p(T_k) &= \sum_{k=1}^n (t_{k-1} - t_k) = t_0 - t_n \text{ (sommaton en dominos)} \\ &= 1 - \frac{2^{n+1} + 3^n - 2}{9^n} \end{aligned}$$

qui tend bien vers 1 en $+\infty$. D'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kp(T_k) &= \sum_{k=1}^n k(t_{k-1} - t_k) = \left(\sum_{k=1}^n t_{k-1}\right) - nt_n \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{k+1} + 3^k - 2}{9^k}\right) - n \frac{2^{n+1} + 3^n - 2}{9^n} \end{aligned}$$

Ce qui permet de calculer l'espérance :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{k+1}}{9^k} \text{ tend vers } \frac{18}{7} \\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3^k}{9^k} \text{ tend vers } \frac{3}{2} \\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{9^k} \text{ tend vers } \frac{9}{4} \\ n \frac{2^{n+1} + 3^n - 2}{9^n} \text{ tend vers } 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^n kp(T_k) \text{ tend vers } \frac{51}{28}$$

4. Probabilités pour que A, B, C remportent le combat

a. Si A est le seul tireur restant à l'issue de la n -ième étape alors B et C ont été éliminés avant selon le schéma suivant.

$$(ABC) \xrightarrow{k \text{ fois}} (ABC) \rightarrow (AC) \xrightarrow{n-k-2 \text{ fois}} (AC) \rightarrow (A)$$

Comme déjà vu, tant qu'aucun des tireurs n'est éliminé à chaque étape A vise B, B et C visent A. B est donc éliminé (strictement) avant C. Dès que C est éliminé, A gagne. On voit donc que l'événement A_1 est impossible et que pour $n \geq 2$, A_n est l'union disjointe des

$$ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_{n-1} \cap A_n$$

pour $0 \leq k \leq n - 2$ (où k correspond à l'étape où B a été éliminé).

b. Soit $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n - 2$. D'après la formule des probabilités composées, la probabilité de l'événement correspondant au schéma indiqué est

$$\left(\frac{1}{9}\right)^k \times \frac{2}{9} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k-2} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{9^n} 2^{n+1-k}$$

Ces événements indexés par k sont disjoints, la probabilité que A remporte le combat à l'issue de l'épreuve n est donc la somme des probabilités

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{9^n} 2^{n+1-k} = \frac{1}{9^n} (2^{n+1} + \dots + 2^3) = \frac{2^{n+2} - 2^3}{9^n} = 4 \left(\frac{2}{9}\right)^n - 8 \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

c. L'événement A est l'union disjointe des A_n pour $n \geq 2$. Donc $p(A)$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=2}^n p(A_k)$. On obtient $p(A) = \frac{1}{63}PB$.

$$p(A) = 4 \left(\frac{2}{9}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{2}{9}} - 8 \left(\frac{1}{9}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{16}{9 \times 7} - \frac{8}{9 \times 8} = \frac{16-7}{9 \times 7} = \frac{1}{7}$$

d. Suivant le même principe B_n est l'union disjointe, pour $0 \leq k \leq n-2$, des

$$ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_{n-1} \cap B_n$$

Soit $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n-2$

$$\begin{aligned} p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_{n-1} \cap B_n) \\ = p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_{n-1})p(B_n|BC_{n-1}) \\ = \frac{2}{3^{n+k}} \frac{1}{3} = \frac{2}{3^{n+k+1}} \end{aligned}$$

D'où

$$p(B_n) = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{2n-1}}$$

Donc $p(B)$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=2}^n p(B_k)$. On obtient

$$p(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 3 \left(\frac{1}{9}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{8}$$

e. Pour que C gagne le combat à l'étape n il y a plusieurs cas de figure :

– Soit A et B sont éliminés en même temps. Notons $C_{n,AB}$ cet événement. C'est aussi $ABC_1 \cap \dots \cap ABC_{n-1} \cap C_n$ de probabilité

$$p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_{n-1} \cap C_n) = p(ABC_{n-1})p(C_n|ABC_{n-1}) = \frac{1}{9^{n-1}} \frac{4}{9} = \frac{4}{9^n}$$

– Soit A est éliminé puis B. Notons $C_{n,B}$ cet événement.

C'est l'union disjointe, pour $0 \leq k \leq n-2$, des événements

$$ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_{n-1} \cap C_n$$

Soit $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n-2$

$$\begin{aligned} p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_{n-1} \cap C_n) \\ = p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_{n-1})p(C_n|BC_{n-1}) \\ = \frac{2}{3^{n+k}} \frac{1}{6} = \frac{1}{3^{n+k+1}} \end{aligned}$$

La probabilité de $C_{n,B}$ est donc :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{2n-1}} \right)$$

– Soit B est éliminé puis A. Notons $C_{n,A}$ cet événement. C'est l'union disjointe, pour $0 \leq k \leq n-2$, des événements

$$ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_{n-1} \cap C_n$$

Soit $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n-2$

$$\begin{aligned} p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_{n-1} \cap C_n) \\ = p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_{n-1})p(C_n|CA_{n-1}) \\ = \frac{2^{n-k-1}}{9^{n-1}} \frac{1}{9} = \frac{2^{n-1-k}}{9^n} \end{aligned}$$

La probabilité de $C_{n,A}$ est donc

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{2^{n-1-k}}{9^n} = \frac{1}{9^n} (2^n - 2)$$

L'événement C_n est l'union disjointe des $C_{n,AB}$, $C_{n,B}$ et $C_{n,A}$ Donc $p(C)$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=1}^n p(C_{n,AB}) + \sum_{k=2}^n p(C_{n,B}) + \sum_{k=2}^n p(C_{n,A})$$

On obtient :

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n p(C_{n,AB}) \text{ tend vers } \frac{1}{2} \\ \sum_{k=2}^n p(C_{n,B}) \text{ tend vers } \frac{1}{16} \\ \sum_{k=2}^n p(C_{n,A}) \text{ tend vers } \frac{1}{28} \end{array} \right\} \Rightarrow p(C) = \frac{67}{112}$$

PARTIE II

1. Expression de la matrice de transition M

a. On trouve

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{9} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence, $E_n = M^n E_0$.

2. Calcul des puissances de la matrice M .

a. Vérification évidente à l'aide du produit par blocs.

b. En lisant dans la matrice de transition, on trouve

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{4}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

c.

3. Diagonalisation de la matrice U

a. Le système considéré admet une solution non nulle si la matrice $U - \lambda I_3$ n'est pas inversible. Notons $P(\lambda)$ le déterminant de cette matrice.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{9} - \lambda & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} - \lambda & 0 \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{9} - \lambda\right)\left(\frac{1}{3} - \lambda\right)\left(\frac{2}{9} - \lambda\right)$$

D'où $\lambda_1 = \frac{1}{9}$, $\lambda_2 = \frac{2}{9}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{3}$.

La résolution des systèmes donne $V_1 = (1, -1, -2)$, $V_2 = (0, 0, 1)$ et $V_3 = (0, 1, 0)$.

b. D'après la formule de changement de base, on obtient le résultat cherché, en formant la matrice des vecteurs propres trouvés soit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Calcul de la limite des puissances de la matrice M .

a. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{9^n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2^n}{9^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$$

et

$$I_3 + D + \dots + D^n = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} - \frac{1}{8 \cdot 9^n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{7} - \frac{2^{n+1}}{7 \cdot 9^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} \end{pmatrix}$$

- b. On obtient que (D^n) converge vers la matrice nulle et que $(I_3 + D + \dots + D^n)$ converge vers la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

De $U = PDP^{-1}$, on tire $U^n = PD^nP^{-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que (U^n) converge vers $P0P^{-1}$ ie vers la matrice nulle et $(I_3 + U + \dots + U^n)$ converge vers la matrice

$$P \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{9}{28} & 0 & \frac{9}{7} \end{pmatrix}$$

- c. D'après l'expression de M^n trouvée en 2)c) et en utilisant que $(V + VU + \dots + VU^n)$ converge vers la matrice

$$V \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{9}{28} & 0 & \frac{9}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{67}{112} & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \\ \frac{15}{112} & \frac{1}{4} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Donc

$$E_n = M^n E_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{7} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{67}{112} \\ \frac{15}{112} \end{pmatrix}$$

- d. On retrouve bien que $(p(ABC_n))$, $(p(BC_n))$ et $(p(CA_n))$ convergent vers 0, que $(p(A_n))$ converge vers $\frac{1}{7}$, que $(p(B_n))$ converge vers $\frac{1}{8}$, que $(p(C_n))$ converge vers $\frac{67}{112}$ et que $(p(\emptyset_n))$ converge vers $\frac{15}{112}$.