On considère[1] un compétition entre trois tireurs A, B, C, qui se déroule en une suite d'épreuves de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins deux des trois tireurs :
- Tous les tirs sont indépendants les uns des autres.
- Lorsque A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $\frac{2}{3}$.
- Lorsque B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $\frac{1}{2}$.
- Lorsque C tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $\frac{1}{3}$.
- Lorsque qu'un des tireurs est atteint, il est définitivement éliminé des épreuves suivantes.
- À chacune des épreuves, les tireurs non encore éliminés tirent simultanément et chacun d'eux vise le plus dangereux de ses rivaux non encore éliminés.
  *(Ainsi, à la première épreuve, A vise B tandis que B et C visent A).*

Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on considère les événements suivants :
- $ABC_n$ : « à l'issue de la n-ième épreuve, A, B et C ne sont pas encore éliminés ».
- $AB_n$ : « à l'issue de la n-ième épreuve, seuls A et B ne sont pas encore éliminés ».
  On définit de façon analogue les événements $BC_n$ et $CA_n$.
- $A_n$ : « à l'issue de la n-ième épreuve, seul A n'est pas éliminé ».
  On définit de façon analogue les événements $B_n$ et $C_n$.
- $\emptyset_n$ : « à l'issue de la n-ième épreuve, les trois tireurs sont éliminés ».
- Enfin, $ABC_0$ est l'événement certain, $AB_0$ , $BC_0$ , $CA_0$ , $A_0$ , $B_0$ , $C_0$ , $\emptyset_0$ l'événement impossible.

## PARTIE I

On détermine les probabilités pour que A, B, C remportent la compétition.

1. Calcul de probabilités.
   a. Exprimer, si U et V désignent deux événements quelconques d'un espace probabilisé donné, la probabilité $p(U \cup V)$ en fonction de $p(U)$, $p(V)$ et $p(U \cap V)$.
   b. En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C : (A rate son tir) et (B ou C réussissent leur tir).
   c. En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C : (A réussit son tir) et (B ou C réussissent leur tir).
2. Détermination de probabilités conditionnelles. Soit $n \geq 1$.
   a. Montrer que l'événement $AB_n$ est impossible. Dans la suite, on ne considérera donc que les événements $ABC_n$ , $BC_n$ , $CA_n$ , $A_n$ , $B_n$ , $C_n$ , $\emptyset_n$ .
   b. Expliciter la probabilité conditionnelle $p(ABC_{n+1}|ABC_n)$.
   c. Expliciter $p(BC_{n+1}|ABC_n)$ à l'aide de la question 1), puis donner
   $$p(CA_{n+1}|ABC_n)$$
   d. Expliciter $p(A_{n+1}|ABC_n)$, $p(B_{n+1}|ABC_n)$ et $p(C_{n+1}|ABC_n)$.
   e. Expliciter $p(A_{n+1}|CA_n)$, $p(B_{n+1}|BC_n)$, $p(C_{n+1}|CA_n)$ et $p(C_{n+1}|BC_n)$.
   f. Expliciter $p(\emptyset_{n+1}|ABC_n)$, $p(\emptyset_{n+1}|BC_n)$ et $p(\emptyset_{n+1}|CA_n)$.
3. Nombre moyen d'épreuves à l'issue des quelles s'achève la compétition.
   On note $T_n$ l'événement « Le combat cesse à l' issue de la n-ième épreuve » (la compétition cesse à l'issue de la $n$-ième épreuve s'il n'a pas cessé avant et si à l'issue de la n-ième épreuve il ne reste qu'un tireur au plus).
   a. Quelle est la probabilité de l'événement $T_1$ ?
   b. Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de l'événement :
   $$ABC_1 \cap ABC_2 \cap \cdots \cap ABC_{n-1} \cap ABC_n$$
   c. Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants pour les entiers $0 \leq k \leq n-1$ :
   $$ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \cdots \cap CA_n$$
   (pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $CA_1 \cap CA_2 \cap \cdots \cap CA_n$).
   d. Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants pour les entiers $0 \leq k \leq n-1$ :
   $$ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \cdots \cap BC_n$$
   (pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $BC_1 \cap BC_2 \cap \cdots \cap BC_n$).
   e. Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de l'événement « la compétition n'est pas terminé à l'issue de la n-ième épreuve ». En déduire la probabilité $p(T_n)$ (on vérifiera que cette formule redonne bien pour $n = 1$ le résultat obtenu à la question a)).
   f. Montrer que la somme $\sum_{k=1}^{n} p(T_k)$ tend vers 1 quand $n$ tend vers $+\infty$. Puis déterminer sous forme de fraction irréductible la limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} kp(T_k)$ (cela correspond au nombre moyen d'épreuves à l'issue des quelles s'achève la compétition).

[1] D'après ESSEC 2000, option scientifique, maths 2

4. Probabilités pour que A, B, C remportent la compétition.
   a. Montrer que, si $n = 1$, l'événement « A remporte la compétition à l'issue de la n-ième épreuve » est impossible. Montrer qu'il est égal à la réunion des événements suivants si $n \geq 2$ :
   $$ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \cdots \cap CA_{n-1} \cap A_n \text{ pour } 0 \leq k \leq n-2$$
   (pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $CA_1 \cap CA_2 \cap \cdots \cap CA_{n-1} \cap A_n$).
   b. Calculer la probabilité pour que A remporte la compétition à l'issue de la n-ième épreuve ($n \geq 2$).
   c. En déduire la probabilité pour que A remporte la compétition (c'est à dire pour qu'il ne soit pas éliminé à l'issue du combat).
   d. Déterminer de même la probabilité pour que B remporte la compétition.
   e. Déterminer de même la probabilité pour que C remporte la compétition.

# PARTIE II

Dans cette partie, on retrouve par des méthodes matricielles les probabilités pour que A, B, C remportent la compétition en n'utilisant que les résultats des questions I.1) et I.2).

1. Expression de la matrice de transition $M$.
   a. On considère la matrice-colonne $E_n$ à sept lignes dont les sept éléments sont dans cet ordre, du haut vers le bas,
   $$p(ABC_n),\ p(BC_n),\ p(CA_n),\ p(A_n),\ p(B_n),\ p(C_n),\ p(\emptyset_n)$$
   Expliciter une matrice $M \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad E_{n+1} = ME_n$. On vérifiera que la somme de chacune des colonnes de $M$ est égale à 1.
   b. En déduire $E_n$ en fonction de $n$, de $M$ et $E_0$.
2. Calcul des puissances de la matrice $M$.
   a. On considère deux matrices carrées d'ordre 3 notées $U'$ , $U''$ et deux matrices rectangulaires à 4 lignes et 3 colonnes notées $V'$ , $V''$ et l'on forme les matrices carrées d'ordre 7 :
   $$M' = \begin{pmatrix} U' & 0 \\ V' & I_4 \end{pmatrix} \qquad M'' = \begin{pmatrix} U'' & 0 \\ V'' & I_4 \end{pmatrix}$$
   où 0 désigne la matrice nulle à 3 lignes et 4 colonnes et $I_4$ la matrice-identité d'ordre 4. Vérifier à l'aide des règles du produit matriciel l'égalité suivante :
   $$M'M'' = \begin{pmatrix} U'U'' & 0 \\ V'U'' + V'' & I_4 \end{pmatrix}$$
   b. Expliciter les matrices $U$ et $V$ telles que :
   $$M = \begin{pmatrix} U & 0 \\ V & I_4 \end{pmatrix}$$
   c. Établir enfin, pour $n \geq 1$, l'égalité suivante :
   $$M^n = \begin{pmatrix} U^n & 0 \\ V + VU + \dots VU^{n-1} & I_4 \end{pmatrix}$$
3. Diagonalisation de la matrice $U$.
   a. Déterminer trois réels $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ tel que le système (d'inconnue $X$, matrice colonne de taille 3), $UX = \lambda X$ ait une solution non nulle. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer $V_i$ la solution du système $UX = \lambda_i X$ telle que
   – la *première* composante de $V_1$ vaut 1.
   – la *troisième* composante de $V_2$ vaut 1.
   – la *deuxième* composante de $V_3$ vaut 1.
   b. Déterminer une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ telles que $D = P^{-1}UP$. Préciser $P^{-1}$.
4. Calcul de la limite des puissances de la matrice $M$.
   a. Pour $n \in \mathbb{N}$, expliciter les matrices $D^n$ et $I_3 + D + D^2 + \cdots + D^{n-1}$.
   b. On dit qu'une suite de matrices $(X_n)$ à $p$ lignes et $q$ colonnes converge vers une matrice $X$ à $p$ lignes et $q$ colonnes si chaque coefficient de la matrice $X_n$ converge quand $n$ tend vers $+\infty$ vers le coefficient correspondant de la matrice $X$.
   On admettra (sous réserve d'existence) que la limite d'un produit est le produit des limites.
   Expliciter à l'aide des résultats précédents les limites des deux suites matricielles $(D^n)$ et $(I_3 + D + D^2 + \cdots + D^{n-1})$, puis des trois suites matricielles $(U^n)$, $(I_3 + U + U^2 + \cdots + U^{n-1})$ et $(V + VU + VU^2 + \cdots + VU^{n-1})$.
   c. En déduire enfin les limites des deux suites matricielles $(M^n)$ et $(E_n)$.
   d. Vérifier que les suites $(p(ABC_n))$, $(p(BC_n))$ et $(p(CA_n))$ convergent vers 0 et expliciter sous forme d'une fraction irréductible les limites des suites $(p(A_n))$, $(p(B_n))$, $(p(C_n))$, $(p(\emptyset_n))$.
   Retrouver alors les probabilités obtenues en I pour que A, B, C remportent la compétition.