1. Avec la définition,
$$c(1,1,2,2,3,3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{vmatrix}$$
Le facteur 60^3 permet de faire disparaitre les dénominateurs en multipliant chaque colonne par 60.
$$60^3\, c(1,1,2,2,3,3) = \begin{vmatrix} 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \\ 15 & 12 & 10 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 15 & 12 & 10 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2, \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3)$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2, \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2) \quad = -5(-4+3) = 5$$

2. a. Le résultat de l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ est la ligne
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a_2+b_1} - \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} - \frac{1}{a_1+b_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1-a_2}{(a_2+b_1)(a_1+b_1)} & \frac{a_1-a_2}{(a_2+b_2)(a_1+b_2)} \end{pmatrix}$$
Cette opération ne change pas le déterminant et permet de factoriser par $(a_1 - a_2)$ dans L_2, par $\frac{1}{a_1+b_1}$ dans C_1 et par $\frac{1}{a_1+b_2}$ dans C_2 conduisant à la forme indiquée puis à
$$c(a_1, b_1, a_2, b_2) = \frac{(a_1-a_2)(b_2-b_1)}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_1)(a_2+b_2)}$$

b. Le coefficient j de $L_i - L_1$ est
$$\frac{1}{a_i+b_j} - \frac{1}{a_1+b_j} = \frac{a_1-a_i}{(a_i+b_j)(a_1+b_j)}$$

c. On soustrait la ligne L_1 à toutes les autres. La question précédente montre que cela permet de factoriser par $a_1 - a_i$ dans la ligne i pour i de 2 à n. On peut ensuite factoriser par $\frac{1}{a_1+b_j}$ dans la colonne C_j pour j de 1 à $n$ce qui conduit à la forme demandée.

d. On procède de manière analogue avec le déterminant de la question précédente. On enlève la colonne C_1 à toutes les autres. Cela permet de factoriser les $(b_1 - b_2)\cdots(b_1 - b_n)$ dans colonnes de 2 à n. On développe alors suivant la première ligne et dans le déterminant d'ordre $n-1$ restant on peut factoriser par $\frac{1}{a_i+b_1}$ avec i entre 2 et n ce qui montre la formule de récurrence.

3. a. Par définition,
$$F(x) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x+b_1} & \frac{1}{x+b_2} & \cdots & \frac{1}{x+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$
Comme un déterminant est une somme de produits, la fonction F est rationnelle en x et ses pôles sont $-b_1, \cdots, -b_n$. Le développement suivant la première ligne exprime F comme une somme de fractions de degré -1. On en déduit que le degré de F est inférieur ou égal à -1. On peut remarquer que ce développement est en fait la décomposition en éléments simples de F mais ce n'est pas utile dans cet exercice.

b. En réduisant au même dénominateur, on obtient
$$F(x) = \lambda \frac{A(x)}{B(x)} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}, B = (x+b_1)\cdots(x+b_n)$$
et A un polynôme unitaire tel que
$$\deg(F) = \deg(A) - \deg(B) \Rightarrow \deg(A) - n \leq -1 \Rightarrow \deg(A) \leq n-1$$
Or l'expression de $F(x)$ comme déterminant montre que $F(a_2) = \cdots = F(a_n)$ car la même ligne se retrouve alors deux fois. On en déduit que
$$A(x) = (x-a_2)\cdots(x-a_n)$$
Quant au λ, à cause des degrés, c'est la limite en $+\infty$ de $xF(x)$. Or
$$xF(x) = \begin{vmatrix} \frac{x}{x+b_1} & \frac{x}{x+b_2} & \cdots & \frac{x}{x+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

est une combinaison linéaires des termes de la première ligne qui tendent tous vers 1. La limite est donc le déterminant obtenu en remplaçant la première ligne par une ligne de 1.

c. Considérons la fraction rationnelle obtenue à partir de λ en remplaçant le b_1 par une variable x. Ses pôles sont $-a_2, \cdots, -a_n$ mais le développement suivant la première colonne montre cette fois qu'elle est de degré 0. Par répétition de colonnes, elle est nulle en $b_2, \cdots, b_n$ donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$G(x) = \mu \frac{(x - b_2) \cdots (x - b_n)}{(a_2 + x) \cdots (a_n + x)}$$

On en déduit que μ est la limite de $G(x)$ en $+\infty$ ce qui conduit à remplacer le bas de la première colonne par des 0 conduisant ainsi au déterminant $c(a_2, b_2, \cdots, a_n b_n)$ d'ordre $n-2$.