Soient $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ des réels tels que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j \text{ et } b_i \neq b_j$$

Soit $C(a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n)$ la matrice $n \times n$ (dite de Cauchy) dont le coefficient d'indice i, j est $\frac{1}{a_i + b_j}$ et $c(a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n)$ son déterminant.
L'objet de cet exercice est d'obtenir, par deux méthodes différentes une expression factorisée de ce déterminant.

1. Calculer $60^3 c(1,1,2,2,3,3)$.
2. Opérations élémentaires.
   a. Préciser l'opération élémentaire et les factorisations montrant que

$$c(a_1, b_1, a_2, b_2) = \frac{a_1 - a_2}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} \end{vmatrix}$$

   En déduire l'expression factorisée de $c(a_1, b_1, a_2, b_2)$.

   b. On note L_i la ligne i de $C(a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n)$. Pour $i \in [\![2,n]\!]$ et $j \in [\![1,n]\!]$, préciser le coefficient dans la colonne j de $L_i - L_1$.

   c. Montrer que

$$c(a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n) = \frac{\prod_{i=2}^n (a_1 - a_i)}{\prod_{j=1}^n (a_1 + b_j)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

   d. Montrer que

$$c(a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n) = \frac{\prod_{i=2}^n (a_1 - a_i) \prod_{j=2}^n (b_1 - b_j)}{\prod_{j=1}^n (a_1 + b_j) \prod_{i=2}^n (a_i + b_1)} c(a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n)$$

3. Méthode algébrique.
   On considére l'application F définie dans une partie de $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto F(x) = c(x, b_1, \cdots, a_n, b_n)$$

   a. Montrer que F est une fraction rationnelle. Préciser son degré et ses pôles.

   b. Montrer qu'il existe un réel λ et des polynômes unitaires A et B tels que $F = \lambda \frac{A}{B}$. Préciser la forme factorisée de A et B. Montrer que

$$\lambda = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

   c. Comment retrouver la formule de la question 2.d. sans opérations élémentaires ?

Rémy Nicolai M1918E